

数 学

◀法学部 1 部・2 部, 経営学部 1 部 (経営情報)▶

1

解答

(1) $f(x) = x^3 - (z+1)x^2 + (y+z)x - yz$ とおくと

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 - (z+1)z^2 + (y+z)z - yz \\ &= z^3 - z^3 - z^2 + yz + z^2 - yz \\ &= 0 \end{aligned}$$

より, $x-z$ が因数となる。

$$f(x) = (x-z)(x^2 - x + y) \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & -z-1 & y+z & -yz &)z \\ & z & -z & yz & \\ \hline 1 & -1 & y & 0 & \end{array}$$

別解 〈その 1〉 y に着目して整理すると

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= (x-z)y + (-x^2+x)z + x^3 - x^2 \\ &= (x-z)y - (x-1)xz + (x-1)x^2 \\ &= (x-z)y + x(x-1)(-z+x) \\ &= (x-z)(y+x^2-x) \\ &= (x-z)(x^2-x+y) \end{aligned}$$

〈その 2〉 z に着目して整理すると

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= (-x^2 - y + x)z + (x^3 - x^2 + xy) \\ &= -(x^2 - x + y)z + x(x^2 - x + y) \\ &= (x^2 - x + y)(x - z) \end{aligned}$$

$$(2) \quad a = \frac{5}{\sqrt{10} - \sqrt{5}} = \frac{5(\sqrt{10} + \sqrt{5})}{10 - 5} = \sqrt{10} + \sqrt{5}$$

$$b = \frac{5}{\sqrt{10} + \sqrt{5}} = \frac{5(\sqrt{10} - \sqrt{5})}{10 - 5} = \sqrt{10} - \sqrt{5}$$

より

$$a+b=2\sqrt{10}, \quad ab=10-5=5$$

これより

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=40-10=30$$

よって

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=900-2\times 25=850 \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \quad (\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{9}{25} \quad \text{より}$$

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{9}{25} \quad 1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{25}$$

$$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{16}{25} \quad \sin\theta\cos\theta=-\frac{8}{25} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{3}{5}, \quad \sin\theta\cos\theta=-\frac{8}{25} \quad \text{より } \sin\theta, \cos\theta \text{ は 2 次方程式}$$

$$x^2-\frac{3}{5}x-\frac{8}{25}=0 \text{ の 2 解である。}$$

$$25x^2-15x-8=0$$

$$x=\frac{15\pm\sqrt{225+800}}{50}=\frac{15\pm5\sqrt{41}}{50}=\frac{3\pm\sqrt{41}}{10}$$

$$0^\circ\leq\theta\leq 180^\circ \text{ より } \sin\theta\geq 0 \text{ なので, } \sin\theta=\frac{3+\sqrt{41}}{10} \text{ となり}$$

$$\cos\theta=\frac{3-\sqrt{41}}{10} \quad \dots\dots(\text{答})$$

2A

解答

(1) 1 から 6 までの目から異なる 3 つを選べば $a_1 < a_2 < a_3$ となる (a_1, a_2, a_3) が決まるから

$${}_6C_3=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=20 \text{ 通り} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) 1 から 6 までの 6 種類の目から重複を許して 3 つ選べば $a_1\leq a_2\leq a_3$ となる (a_1, a_2, a_3) が決まるので, 3 つの「○」と 5 つの「|」の順列を考えて

$${}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ 通り} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(注) 3つの「○」と5つの「|」の順列は次のような意味である。

$$\bigcirc || \bigcirc | \bigcirc || \iff (1, 3, 4) \quad | \bigcirc \bigcirc || || \bigcirc \iff (2, 2, 6)$$

$$|| \bigcirc \bigcirc \bigcirc || \iff (3, 3, 3)$$

このように対応させると、 $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ となる (a_1, a_2, a_3) と3つの「○」と5つの「|」の順列が1対1に対応する。

(3) (2)と同様に n 個の「○」と5つの「|」の順列を考えて

$$\begin{aligned} {}_{n+5}C_5 &= \frac{(n+5)(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{1}{120} (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \text{ 通り} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$

2B

解答

(1) $2025_{(8)}$ を10進法で表すと

$$\begin{aligned} 2025_{(8)} &= 2 \times 8^3 + 2 \times 8 + 5 \\ &= 1024 + 16 + 5 = 1045 \end{aligned}$$

1045 を2進法で表すと

$$1045 = 10000010101_{(2)} \quad \dots\dots (\text{答})$$

別解 $2025_{(8)} = 2 \times 8^3 + 2 \times 8 + 5$

$$\begin{aligned} &= 2 \times 2^9 + 2 \times 2^3 + 2^2 + 1 \\ &= 2^{10} + 2^4 + 2^2 + 1 \end{aligned}$$

よって $10000010101_{(2)}$

(2) $15857 = 10807 \times 1 + 5050$

$$10807 = 5050 \times 2 + 707$$

$$5050 = 707 \times 7 + 101$$

$$707 = 101 \times 7$$

よって、15857 と 10807 の最大公約数は 101 である。

$$\frac{15857}{10807} = \frac{157}{107} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) $x^4 + y^2 = 2025$ より $y^2 = 2025 - x^4$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 1045} \\ 2 \overline{) 522} \cdots 1 \\ 2 \overline{) 261} \cdots 0 \\ 2 \overline{) 130} \cdots 1 \\ 2 \overline{) 65} \cdots 0 \\ 2 \overline{) 32} \cdots 1 \\ 2 \overline{) 16} \cdots 0 \\ 2 \overline{) 8} \cdots 0 \\ 2 \overline{) 4} \cdots 0 \\ 2 \overline{) 2} \cdots 0 \\ 2 \overline{) 1} \cdots 0 \\ 0 \cdots 1 \end{array}$$

$$y^2 \geq 1 \text{ より } 2025 - x^4 \geq 1 \quad x^4 \leq 2024$$

これを満たす自然数 x の範囲は

$$1 \leq x \leq 6$$

$$x=1 \text{ のとき } y^2=2024$$

$$x=2 \text{ のとき } y^2=2009$$

$$x=3 \text{ のとき } y^2=1944$$

$$x=4 \text{ のとき } y^2=1769$$

$$x=5 \text{ のとき } y^2=1400$$

となり、いずれも自然数 y は存在しない。

$$x=6 \text{ のとき } y^2=729$$

これを満たす自然数 y は $y=27$

以上より $(x, y) = (6, 27) \dots\dots(\text{答})$

3

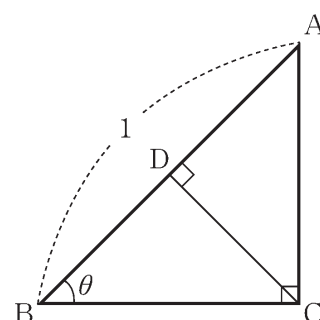
解答

(1) $BC = \cos\theta$, $AC = \sin\theta$ より、三角形 ABC の周の長さ l は

$$l = \sin\theta + \cos\theta + 1 \dots\dots(\text{答})$$

三角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \sin\theta \cos\theta \dots\dots(\text{答})$$



$$(2) \quad l = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ より}$$

$$\sin\theta + \cos\theta + 1 = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \quad \sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \frac{3}{2} \text{ より}$$

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{3}{2}$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{2} \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \dots\dots(\text{答})$$

- (3) $\angle BDC = \angle BCA = 90^\circ$, $\angle CBD = \angle ABC$ から 2 組の角がそれぞれ等しいので

$$\triangle ABC \sim \triangle CBD$$

よって, $AB : CB = 1 : \cos \theta$ より $S : S' = 1^2 : \cos^2 \theta$

したがって, $l = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき $S = \frac{1}{8}$ であるから

$$S' = \cos^2 \theta S = \frac{\cos^2 \theta}{8} = \frac{1 + \cos 2\theta}{16}$$

$$l = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ のとき } \sin 2\theta = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ < \theta < 45^\circ \text{ より } 0^\circ < 2\theta < 90^\circ$$

よって, $2\theta = 30^\circ$ であるから

$$\cos 2\theta = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ゆえに

$$S' = \frac{1}{16} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{32} (2 + \sqrt{3}) \quad \dots\dots (\text{答})$$

4

解答

- (1) $f(x) = x^3 - 6ax^2 + 32a^3$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 12ax = 3x(x - 4a)$$

$f'(x) = 0$ となる x の値は

$$x = 0, 4a$$

$a < 0$ より $4a < 0$ である。

増減表より, $x = 4a$ のとき極大, 極大値 p は

$$p = 64a^3 - 96a^3 + 32a^3 = 0 \quad \dots\dots (\text{答})$$

$x = 0$ のとき極小, 極小値 q は

$$q = 32a^3 \quad \dots\dots (\text{答})$$

x	$\cdots$	$4a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

- (2) $a > 0$ のとき $0 < 4a$ より, 増減表は右のようになる。

$x = 0$ のとき極大値 $p = 32a^3$, $x = 4a$ の

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$4a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

とき極小値 $q=0$ をとる。

$$|p-q|=4 \text{ より } |32a^3|=4$$

$a>0$ より $32a^3>0$ だから

$$32a^3=4 \quad a^3=\frac{1}{8}$$

$$a \text{ は実数より } a=\frac{1}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \quad a<0 \text{ のとき } p=0, \quad q=32a^3$$

$$|p-q|=4 \text{ より } |-32a^3|=4$$

$a<0$ より $-32a^3>0$ だから

$$-32a^3=4 \quad a^3=-\frac{1}{8}$$

$$a \text{ は実数より } a=-\frac{1}{2}$$

このとき

$$f(x)=x^3+3x^2-4=(x+2)^2(x-1)$$

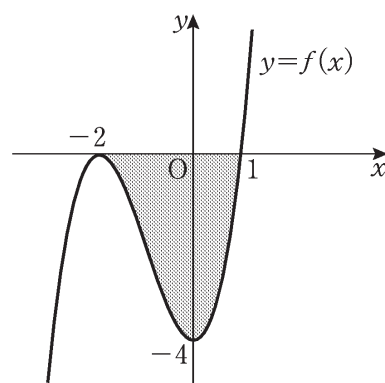
グラフは右図のようになるので

$$S=-\int_{-2}^1 (x^3+3x^2-4)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{4}x^4+x^3-4x\right]_{-2}^1$$

$$=-\left\{\frac{1}{4}+1-4-(4-8+8)\right\}$$

$$=\frac{27}{4} \quad \dots\dots(\text{答})$$



5

解答

$$(1) \quad a_1=1, \quad a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \text{ より, } \{a_n\} \text{ は初項 } 1, \text{ 公比}$$

$\frac{1}{2}$ の等比数列だから

$$a_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad b_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

両辺に 2^n をかけて

$$2^n b_{n+1} = \frac{4}{3} \cdot 2^{n-1} b_n + 1$$

$$d_n = 2^{n-1} b_n \text{ より} \quad d_{n+1} = \frac{4}{3} d_n + 1$$

よって, $d_{n+1} + 3 = \frac{4}{3}(d_n + 3)$ と変形できる。

$d_1 + 3 = b_1 + 3 = 3$ から, $\{d_n + 3\}$ は初項 3, 公比 $\frac{4}{3}$ の等比数列より

$$d_n + 3 = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

$$d_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 3 \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(3) \quad b_n = \frac{1}{2^{n-1}} d_n = \frac{1}{2^{n-1}} \left\{ 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 3 \right\} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

より

$$c_{n+1} = c_n + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$e_n = c_{n+1} - c_n$ とおくと

$$e_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} c_n &= c_1 + \sum_{k=1}^{n-1} e_k \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \right\} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \frac{2}{3}} - \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 3 - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1 \end{aligned}$$

$c_1=0$ はこれに含まれる。よって

$$c_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + 1 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$