2025年度 一般選抜（2月10日）

数　学

◀工学部（社会環境工〈社会環境コース〉・電子情報工）▶

1 解答

(1) $6x^2+(5y-9)x-(6y^2-19y+15)$

$=6x^2+(5y-9)x-(3y-5)(2y-3)$

$=(3x-2y+3)(2x+3y-5)$ ……(答)

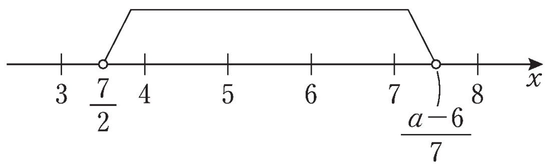
(2) $\begin{cases} 7x+6<a & \cdots\cdots① \\ 9x+1>7x+8 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より　$7x<a-6$

$x<\dfrac{a-6}{7}$ ……①′

②より　$2x>7$

$x>\dfrac{7}{2}$ ……②′



①′と②′を満たす x の範囲は

$\dfrac{7}{2}<x<\dfrac{a-6}{7}$

この範囲に整数 x がちょうど4個存在する条件は

$7<\dfrac{a-6}{7}\leqq 8$　　$49<a-6\leqq 56$

$55<a\leqq 62$ ……(答)

(3) $(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+\sin 2\theta=1+\dfrac{4}{5}=\dfrac{9}{5}$

$\pi<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ より　　$\sin\theta<0,\ \cos\theta<0$

よって，$\sin\theta+\cos\theta<0$ であるから

$$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{3}{\sqrt{5}}=-\frac{3\sqrt{5}}{5}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

2 解答

(1)　$f(x)=x^4-ax^3+ax-1$ より

$$f'(x)=4x^3-3ax^2+a$$

$f'(1)=0$ より

$$4-3a+a=0\qquad 2a=4$$

$$a=2\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

$$f(x)=x^4-2x^3+2x-1$$

$$\begin{aligned}f'(x)&=4x^3-6x^2+2\\&=2(2x^3-3x^2+1)\\&=2(x-1)(2x^2-x-1)\\&=2(x-1)^2(2x+1)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrrr|l}2&-3&0&1&\,1\\&2&-1&-1&\\\hline 2&-1&-1&0&\end{array}$$

$f'(x)=0$ となる x の値は　　$x=-\dfrac{1}{2},\ 1$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	0	↗

増減表より，$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき極小値をとる。

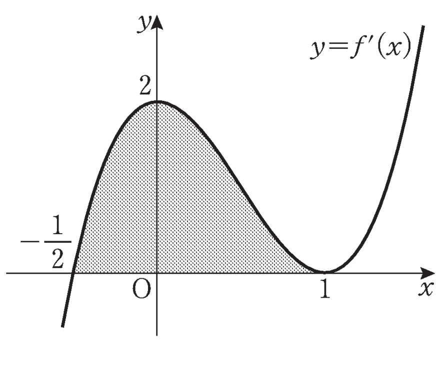
$\cdots\cdots(\text{答})$

極小値は

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-1-1=\frac{1+4-32}{16}=-\frac{27}{16}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　グラフは右図のようになるので

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(4x^3-6x^2+2)\,dx\\&=\Big[x^4-2x^3+2x\Big]_{-\frac{1}{2}}^{1}\\&=1-2+2-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{4}-1\right)\end{aligned}$$



$$=2-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}$$

$$=\frac{32-1-4}{16}=\frac{27}{16} \quad \cdots\cdots(答)$$

3 解答

(1) $y=\frac{1}{6}(1-x^2)^3$ より

$$y'=\frac{1}{6}\cdot 3(1-x^2)^2\cdot(-2x)=-x(1-x^2)^2 \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{x^2(1+\cos 3x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\cdot\frac{9}{1+\cos 3x}$$

$$=1^2\times\frac{9}{1+1}=\frac{9}{2} \quad \cdots\cdots(答)$$

別解 半角の公式より $1-\cos 3x=2\sin^2\frac{3}{2}x$ だから

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3}{2}x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}\right)^2\cdot 2\cdot\frac{9}{4}$$

$$=1^2\cdot 2\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$$

(3) $x^2=t$ とおくと　$2xdx=dt$

$$\int 2x^3e^{x^2}dx=\int te^t dt=te^t-\int e^t dt$$

$$=te^t-e^t+C=(t-1)e^t+C$$

$$=(x^2-1)e^{x^2}+C \quad (C\text{ は積分定数}) \quad \cdots\cdots(答)$$

4 解答

(1)　硬貨が表となる事象を③，裏となる事象を$\triangle_{-1}$で表す。それぞれが起こる確率はともに $\frac{1}{2}$ である。

$n=3$ のとき $x=5$ となるのは③が 2 回，$\triangle_{-1}$が 1 回起こるときだから，確率は

$$ {}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8} \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)　10 回のうち③が r 回起こるとすれば$\triangle_{-1}$は $10-r$ 回起こるので，10 回の試行が終わったときの P の座標は

$$3r-(10-r)=4r-10 \quad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

$4r-10=2$ より　　$4r=12$　　$r=3$

したがって，$n=10$ のとき $x=2$ となるのは③が 3 回，$\triangle_{-1}$が 7 回起こるときだから，確率は

$$ {}_{10}C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{1}{2^{10}}=\frac{15}{128} \quad \cdots\cdots(答)$$

(3)　8 回のうち③が r 回起こるとすれば，8 回の試行が終わったときの P の座標 x は(2)と同様にして

$$x=3r-(8-r)=4r-8$$

$13\leqq x\leqq 26$ より

$$13\leqq 4r-8\leqq 26 \qquad 21\leqq 4r\leqq 34 \qquad \frac{21}{4}\leqq r\leqq\frac{17}{2}$$

r は整数だから　　$r=6,\ 7,\ 8$

よって，③が 6 回，$\triangle_{-1}$が 2 回，または③が 7 回，$\triangle_{-1}$が 1 回，または③が 8 回起こる確率を求めればよい。

$$ {}_8C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_8C_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\cdot\frac{1}{2}+{}_8C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{28+8+1}{2^8}=\frac{37}{256}$$

……(答)

5 解答

(1)　　$225=3^2\times5^2,\ 405=3^4\times5$

よって，最小公倍数は

$a=3^4\times5^2=2025$ ……(答)

405 の正の約数は

$3^m\times5^n$ （m，n は整数，$0\leqq m\leqq4$，$0\leqq n\leqq1$）

と表されるので，その個数は

$b=5\times2=10$ ……(答)

(2) 右の計算により

$$\begin{array}{r|rl} 8 & 2025 & \\ \hline 8 & 253 & \cdots 1 \\ \hline 8 & 31 & \cdots 5 \\ \hline 8 & 3 & \cdots 7 \\ \hline & 0 & \cdots 3 \end{array}$$

$a=2025=3751_{(8)}$ ……(答)

(3) $2025x+100y=25$

$81x+4y=1$

これを満たす整数解の 1 つは

$x=1$，$y=-20$

$$\begin{array}{rrrl} & 81x & +\ 4y & =1 \\ -) & 81\cdot1 & +4\cdot(-20) & =1 \\ \hline & \multicolumn{3}{l}{81(x-1)+4(y+20)=0} \end{array}$$

$81(x-1)=-4(y+20)$ ……(＊)

81 と 4 は互いに素だから，$x-1$ は 4 の倍数。

よって，$x-1=4k$ とおくと，(＊)より

$y+20=-81k$

ゆえに

$(x,\ y)=(4k+1,\ -81k-20)$ （k は整数） ……(答)

6 解答

(1) $z^2-pz+1=0$ は α を解にもつので

$\alpha^2-p\alpha+1=0$

$$\alpha=\frac{p\pm\sqrt{p^2-4}}{2}=\frac{p}{2}\pm\frac{\sqrt{4-p^2}}{2}i \quad (\because\ -2\leqq p\leqq2)$$

$$|\alpha|=\sqrt{\frac{p^2}{4}+\frac{4-p^2}{4}}=1 \quad \text{……(答)}$$

(2) α の偏角は θ だから

$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$

同様に $|\beta|=1$，β の偏角は ϕ だから

$\beta=\cos\phi+i\sin\phi$

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\phi+i\sin\phi)\\&=\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)\\&=\cos 0+i\sin 0=1\quad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

(3) $\alpha\beta=\cos\dfrac{\pi}{11}+i\sin\dfrac{\pi}{11}$ より

$$(\alpha\beta)^n=\left(\cos\frac{\pi}{11}+i\sin\frac{\pi}{11}\right)^n=\cos\frac{n\pi}{11}+i\sin\frac{n\pi}{11}$$

虚部 $\sin\dfrac{n\pi}{11}$ が最大となるのは

$$\frac{n\pi}{11}=\frac{5\pi}{11}+2k\pi,\ \ \frac{6\pi}{11}+2k\pi$$

$n=5+22k$，$6+22k$ （k は整数）

のときであるから，最小の自然数 n は

$n=5\quad\cdots\cdots(\text{答})$