

数 学

◀経済学部・経営学部（経営）▶

1

解答

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 6x^2 + (5y-9)x - (6y^2 - 19y + 15) \\
 &= 6x^2 + (5y-9)x - (3y-5)(2y-3) \\
 &= (3x-2y+3)(2x+3y-5) \quad \dots\dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

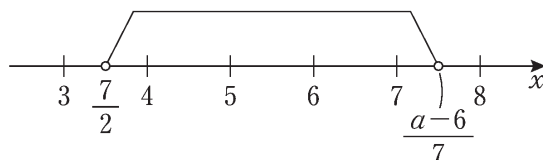
$$(2) \quad \begin{cases} 7x+6 < a & \dots\dots ① \\ 9x+1 > 7x+8 & \dots\dots ② \end{cases}$$

$$① \text{ より } 7x < a-6$$

$$x < \frac{a-6}{7} \quad \dots\dots ①'$$

$$② \text{ より } 2x > 7$$

$$x > \frac{7}{2} \quad \dots\dots ②'$$



①' と ②' を満たす x の範囲は

$$\frac{7}{2} < x < \frac{a-6}{7}$$

この範囲に整数 x がちょうど 4 個存在する条件は

$$7 < \frac{a-6}{7} \leq 8 \quad 49 < a-6 \leq 56$$

$$55 < a \leq 62 \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \sqrt{x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}} = \sqrt{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2} = \left|x + \frac{1}{3}\right| \\
 & \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}} = \sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2} = \left|x - \frac{1}{4}\right|
 \end{aligned}$$

より

$$\left|x + \frac{1}{3}\right| + \left|x - \frac{1}{4}\right| = x + \frac{7}{12}$$

(i) $x < -\frac{1}{3}$ のとき

$$-x - \frac{1}{3} - x + \frac{1}{4} = x + \frac{7}{12} \quad 3x = -\frac{2}{3} \quad x = -\frac{2}{9}$$

これは $x < -\frac{1}{3}$ を満たさない。

(ii) $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{4}$ のとき

$$x + \frac{1}{3} - x + \frac{1}{4} = x + \frac{7}{12} \quad x = 0$$

これは $-\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{4}$ を満たす。

(iii) $\frac{1}{4} \leq x$ のとき

$$x + \frac{1}{3} + x - \frac{1}{4} = x + \frac{7}{12} \quad x = \frac{1}{2}$$

これは $\frac{1}{4} \leq x$ を満たす。

(i), (ii), (iii)より $x = 0, \frac{1}{2}$ ……(答)

2A

解答

(1) 硬貨が表となる事象を③, 裏となる事象を△₁で表す。それぞれが起こる確率はともに $\frac{1}{2}$ である。

$n=3$ のとき $x=5$ となるのは③が2回, △₁が1回起こるときだから, 確率は

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) 10回のうち③が r 回起こるとすれば△₁は $10-r$ 回起こるので, 10回の試行が終わったときのPの座標は

$$3r - (10 - r) = 4r - 10 \quad (r = 0, 1, 2, \dots, 10)$$

$$4r - 10 = 2 \text{ より } \quad 4r = 12 \quad r = 3$$

したがって、 $n=10$ のとき $x=2$ となるのは③が 3 回、 $\triangle_1$ が 7 回起こるときだから、確率は

$${}_{10}C_3 \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \right)^7 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{15}{128} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) 8 回のうち③が r 回起こるとすれば、8 回の試行が終わったときの P の座標 x は(2)と同様にして

$$x = 3r - (8 - r) = 4r - 8$$

$$13 \leq x \leq 26 \text{ より}$$

$$13 \leq 4r - 8 \leq 26 \quad 21 \leq 4r \leq 34 \quad \frac{21}{4} \leq r \leq \frac{17}{2}$$

$$r \text{ は整数だから } \quad r = 6, 7, 8$$

よって、③が 6 回、 $\triangle_1$ が 2 回、または③が 7 回、 $\triangle_1$ が 1 回、または③が 8 回起こる確率を求めればよい。

$${}_8C_6 \left(\frac{1}{2} \right)^6 \left(\frac{1}{2} \right)^2 + {}_8C_7 \left(\frac{1}{2} \right)^7 \cdot \frac{1}{2} + {}_8C_8 \left(\frac{1}{2} \right)^8 = \frac{28 + 8 + 1}{2^8} = \frac{37}{256} \quad \dots\dots (\text{答})$$

2B

解答

$$(1) \quad 225 = 3^2 \times 5^2, \quad 405 = 3^4 \times 5$$

よって、最小公倍数は

$$a = 3^4 \times 5^2 = 2025 \quad \dots\dots (\text{答})$$

405 の正の約数は

$$3^m \times 5^n \quad (m, n \text{ は整数}, \quad 0 \leq m \leq 4, \quad 0 \leq n \leq 1)$$

と表されるので、その個数は

$$b = 5 \times 2 = 10 \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) 右の計算により

$$a = 2025 = 3751_{(8)} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(3) \quad 2025x + 100y = 25$$

$$81x + 4y = 1$$

$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 2025} \\ 8 \overline{) 253} \cdots 1 \\ 8 \overline{) 31} \cdots 5 \\ 8 \overline{) 3} \cdots 7 \\ 0 \cdots 3 \end{array}$$

これを満たす整数解の1つは

$$x=1, y=-20$$

$$\begin{array}{rcl} 81x & + & 4y = 1 \\ -) & 81 \cdot 1 & + 4 \cdot (-20) = 1 \end{array}$$

$$81(x-1) + 4(y+20) = 0$$

$$81(x-1) = -4(y+20) \quad \cdots \cdots (*)$$

81と4は互いに素だから、 $x-1$ は4の倍数。

よって、 $x-1=4k$ とおくと、 $(*)$ より

$$y+20 = -81k$$

ゆえに

$$(x, y) = (4k+1, -81k-20) \quad (k \text{ は整数}) \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

3

解答

$$(1) \quad f(x) = x^2 - 2px = (x-p)^2 - p^2$$

C の頂点の x 座標が2だから

$$p=2$$

l が2点 $(1, -7)$, $(10, 11)$ を通るから

$$\begin{cases} -7 = 2a - b & \cdots \cdots ① \\ 11 = 20a - b & \cdots \cdots ② \end{cases}$$

$$② - ① \text{ より } \quad 18a = 18 \quad a = 1$$

$$① \text{ へ代入して } \quad -7 = 2 - b \quad b = 9$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = 2x - 9 \end{cases} \text{ より}$$

$$x^2 - 4x = 2x - 9 \quad x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 = 0 \quad x = 3$$

$$\text{このとき} \quad y = 6 - 9 = -3$$

よって、 C と l の共有点の座標は

$$(3, -3) \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$(2) \quad \begin{cases} y = x^2 - 2px \\ y = 2ax - b \end{cases} \text{ より}$$

$$x^2 - 2px = 2ax - b$$

$$x^2 - 2(p+a)x + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

C と l が接するから、 $\textcircled{3}$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = (p+a)^2 - b = 0 \quad (p+a)^2 = b \quad p+a = \pm\sqrt{b}$$

$$p = -a \pm \sqrt{b} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(3) $p = -a \pm \sqrt{b}$ を $\textcircled{3}$ へ代入して

$$x^2 \mp 2\sqrt{b}x + b = 0 \quad (x \mp \sqrt{b})^2 = 0 \quad x = \pm\sqrt{b}$$

このとき

$$y = \pm 2a\sqrt{b} - b$$

よって、 C と l の接点の座標は

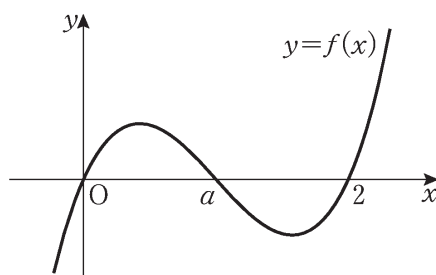
$$(\sqrt{b}, 2a\sqrt{b} - b), (-\sqrt{b}, -2a\sqrt{b} - b) \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

4

解答

$$\begin{aligned} (1) \quad \int_0^a f(x) dx &= \int_0^a \{x^3 - (a+2)x^2 + 2ax\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+2)x^3 + ax^2 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{3}a^3(a+2) + a^3 \\ &= -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{3}a^3 \quad \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad S &= \int_0^2 |f(x)| dx \\ &= \int_0^a f(x) dx + \int_a^2 \{-f(x)\} dx \\ &= \left[F(x) \right]_0^a + \left[-F(x) \right]_a^2 \\ &= F(a) - F(0) - F(2) + F(a) \\ &= 2F(a) - F(0) - F(2) \quad \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$



(3) (2)の結果より

$$S = 2\left(-\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{3}a^3\right) - 0 - \left\{4 - \frac{8}{3}(a+2) + 4a\right\}$$

$$= -\frac{1}{6}a^4 + \frac{2}{3}a^3 - \frac{4}{3}a + \frac{4}{3}$$

$$= g(a)$$

とおく。

$$g'(a) = -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - \frac{4}{3}$$

$$= -\frac{2}{3}(a^3 - 3a^2 + 2)$$

$$= -\frac{2}{3}(a-1)(a^2 - 2a - 2)$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -3 & 0 & 2 \\ & 1 & -2 & -2 \\ \hline 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l})1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$g'(a)=0$ となる a の値は

$$a=1, 1 \pm \sqrt{3}$$

$$0 < a < 2 \text{ より } a=1$$

増減表より $g(a)$ は $a=1$ のとき最小となる。

よって、 S が最小となる a の値は

$$a=1 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

a	0	...	1	...	2
$g'(a)$		-	0	+	
$g(a)$		↘	極小	↗	

5

解答

$$(1) \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{(4n+2)a_n + 1}$$

$$a_1 = \frac{2}{3} \neq 0 \text{ より } a_n \neq 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

であるから、両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 4n + 2$$

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{ より } b_{n+1} = b_n + 4n + 2 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$(2) \quad (1) \text{より } b_{n+1} - b_n = 4n + 2$$

$$c_n = b_{n+1} - b_n \text{ とおくと } c_n = 4n + 2$$

$n \geq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (4k + 2)$$

$$= \frac{3}{2} + 4 \times \frac{1}{2}(n-1)n + 2(n-1)$$

$$= 2n^2 - \frac{1}{2}$$

これは $b_1 = \frac{3}{2}$ を満たすので

$$b_n = 2n^2 - \frac{1}{2} \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$(3) \quad a_k = \frac{1}{b_k} = \frac{1}{2k^2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{4k^2 - 1} = \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$$

より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-1}{2n+1} \\ &= \frac{2n}{2n+1} \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$