2025年度 一般選抜（2月9日）

数 学

◀工学部（建築）▶

1 解答

(1) $x^4-x^2+16=(x^4+8x^2+16)-9x^2$

$=(x^2+4)^2-(3x)^2$

$=(x^2+4+3x)(x^2+4-3x)$

$=(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)$ ……(答)

(2) $(1+\sqrt{6}+\sqrt{7})(1+\sqrt{6}-\sqrt{7})=(1+\sqrt{6})^2-7$

$=1+2\sqrt{6}+6-7$

$=2\sqrt{6}$

$2\sqrt{6}=\sqrt{24}$ より　$\sqrt{16}<2\sqrt{6}<\sqrt{25}$　$4<2\sqrt{6}<5$

これより，整数部分 a は　$a=4$

小数部分 b は　$b=2\sqrt{6}-4$

$a^2-8a-b^2-8b=a^2-b^2-8a-8b$

$=(a+b)(a-b)-8(a+b)$

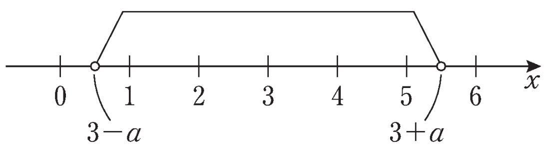
$=(a+b)(a-b-8)$

$=2\sqrt{6}\times(-2\sqrt{6})=-24$ ……(答)

(3) $|-x+3|=|x-3|$ より　$|x-3|<a$

$-a<x-3<a$

$3-a<x<3+a$



この範囲に整数 x がちょうど5個存在する条件は

$0\leqq 3-a<1$　かつ　$5<3+a\leqq 6$

これより　$2<a\leqq 3$ ……(答)

② 解答

(1)　放物線 $y=ax^2+bx+c$ が 3 点 $(0,\ 6)$，$(1,\ 3)$，$(4,\ 6)$ を通るから

$$\begin{cases} 6=c & \cdots\cdots① \\ 3=a+b+c & \cdots\cdots② \\ 6=16a+4b+c & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①を②へ代入して

$a+b=-3$　……④

①を③へ代入して

$16a+4b=0$　　$4a+b=0$　……⑤

⑤－④ より　　$3a=3$　　$a=1$

④へ代入して　　$b=-4$

したがって，$(a,\ b,\ c)=(1,\ -4,\ 6)$ から放物線は

$y=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$

C の頂点の座標は　　$(2,\ 2)$　……(答)

(2)　$y=x^2-4x+6$ より

$y'=2x-4$

$x=4$ のとき

$y'=8-4=4$

接線の方程式は

$y-6=4(x-4)$　　$y=4x-10$

よって　　$p=4$，$q=-10$　……(答)

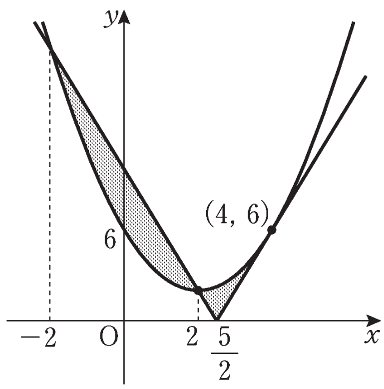
(3)　$$y=|4x-10|=\begin{cases} -4x+10 & \left(x<\dfrac{5}{2}\right) \\ 4x-10 & \left(\dfrac{5}{2}\leqq x\right) \end{cases}$$

$\begin{cases} y=x^2-4x+6 \\ y=-4x+10 \end{cases}$ より

$x^2-4x+6=-4x+10$

$x^2=4$　　$x=\pm 2$

グラフは右図のようになるので



$$S=\int_{-2}^{2}(-4x+10-x^2+4x-6)dx+\int_{2}^{\frac{5}{2}}(x^2-4x+6+4x-10)dx$$

$$+\int_{\frac{5}{2}}^{4}(x^2-4x+6-4x+10)dx$$

$$=-\int_{-2}^{2}(x-2)(x+2)dx+\int_{2}^{\frac{5}{2}}(x^2-4)dx+\int_{\frac{5}{2}}^{4}(x-4)^2dx$$

$$=\frac{1}{6}\{2-(-2)\}^3+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^{\frac{5}{2}}+\left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_{\frac{5}{2}}^{4}$$

$$=\frac{32}{3}+\frac{125}{24}-10-\left(\frac{8}{3}-8\right)+\frac{9}{8}$$

$$=\frac{37}{3}\quad\cdots\cdots(答)$$

3 解答

(1) 起こりうるすべての場合は　$6\times6\times6\times6$ 通り

$d=0$ となるのは，$|a_1-a_3|+|a_2-a_4|=0$ より

$$a_1=a_3 \quad かつ \quad a_2=a_4$$

のときである。

$(a_1,\ a_3)$，$(a_2,\ a_4)$ はそれぞれ 6 通りずつあるから，$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ は　6×6 通り

よって

$$P(d=0)=\frac{6\times6}{6\times6\times6\times6}=\frac{1}{36}\quad\cdots\cdots(答)$$

(2) $d=1$ となるのは，$|a_1-a_3|+|a_2-a_4|=1$ より

$$|a_1-a_3|=1,\ |a_2-a_4|=0$$

または　$|a_1-a_3|=0,\ |a_2-a_4|=1$

$$a_1-a_3=\pm1,\ a_2-a_4=0 \quad または \quad a_1-a_3=0,\ a_2-a_4=\pm1$$

$$a_1=a_3\pm1,\ a_2=a_4 \quad または \quad a_1=a_3,\ a_2=a_4\pm1$$

$a_1=a_3\pm1$ より

$(a_1,\ a_3)=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(3,\ 4)$，
$(4,\ 3)$，$(4,\ 5)$，$(5,\ 4)$，$(5,\ 6)$，$(6,\ 5)$　の 10 通り

$a_2=a_4$ より $(a_2,\ a_4)$ は 6 通り

であるから，$a_1=a_3\pm1$，$a_2=a_4$ となる $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ は

$$10\times6=60\text{ 通り}$$

同様にして，$a_1=a_3$，$a_2=a_4\pm1$ となる $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ も 60 通りあるから，$d=1$ となる場合は

$$60+60=120\text{ 通り}$$

よって

$$P(d=1)=\frac{120}{6\times6\times6\times6}=\frac{5}{54}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $d=2$ となるのは，$|a_1-a_3|+|a_2-a_4|=2$ より

(i) $|a_1-a_3|=2$，$|a_2-a_4|=0$

(ii) $|a_1-a_3|=1$，$|a_2-a_4|=1$

(iii) $|a_1-a_3|=0$，$|a_2-a_4|=2$

のいずれかである。

(i)は，$a_1=a_3\pm2$，$a_2=a_4$ より

$(a_1,\ a_3)=(1,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 1),\ (3,\ 5),$
$(4,\ 2),\ (4,\ 6),\ (5,\ 3),\ (6,\ 4)$ の 8 通り

$(a_2,\ a_4)$ は 6 通り

であるから，$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ は

$$8\times6=48\text{ 通り}$$

(ii)は，$a_1=a_3\pm1$，$a_2=a_4\pm1$ より，(2)と同様にして

$$10\times10=100\text{ 通り}$$

(iii)は，(i)と同様にして 48 通りであるから，$d=2$ となる場合は

$$48+100+48=196\text{ 通り}$$

したがって

$$P(d=2)=\frac{196}{6\times6\times6\times6}=\frac{49}{324}$$

よって

$$\begin{aligned}P(d\geqq3)&=1-P(d=0)-P(d=1)-P(d=2)\\&=1-\frac{1}{36}-\frac{5}{54}-\frac{49}{324}\\&=\frac{236}{324}=\frac{59}{81}\quad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

④ 解答

(1) 右の計算より

$$2025 = 2210000_{(3)} \quad \cdots\cdots(答)$$

$$\begin{array}{r|rl} 3 & 2025 & \\ \hline 3 & 675 & \cdots 0 \\ \hline 3 & 225 & \cdots 0 \\ \hline 3 & 75 & \cdots 0 \\ \hline 3 & 25 & \cdots 0 \\ \hline 3 & 8 & \cdots 1 \\ \hline 3 & 2 & \cdots 2 \\ \hline & 0 & \cdots 2 \end{array}$$

(2) 方程式 $7x+5y=29$ の整数解の 1 つは $x=2$，$y=3$ である。

$$\begin{array}{rrcrl} & 7x & + & 5y & =29 \\ -) & 7\times 2 & + & 5\times 3 & =29 \\ \hline & \multicolumn{4}{l}{7(x-2)+5(y-3)=0} \end{array}$$

$$7(x-2) = -5(y-3) \quad \cdots\cdots①$$

7 と 5 は互いに素だから，$x-2$ は 5 の倍数より $x-2=5k$ とおくと，①より

$$y-3 = -7k$$

よって

$$(x,\ y) = (5k+2,\ -7k+3) \quad (k \text{ は整数}) \quad \cdots\cdots(答)$$

(3) (i) $n=3k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

$$n^3+1 = 27k^3+1 = 3\cdot 9k^3+1$$

より，3 で割り切れない。

(ii) $n=3k-1$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

$$n^3+1 = (n+1)(n^2-n+1) = 3k\{(3k-1)^2-(3k-1)+1\}$$

より，3 で割り切れる。

(iii) $n=3k-2$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき

$$\begin{aligned} n^3+1 &= (n+1)(n^2-n+1) \\ &= (3k-1)\{(3k-2)^2-(3k-2)+1\} \\ &= (3k-1)(9k^2-15k+7) \\ &= (3k-1)\{3(3k^2-5k+2)+1\} \end{aligned}$$

より，3 で割り切れない。

(i)，(ii)，(iii)より

$$n = 3k-1 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \quad \cdots\cdots(答)$$

5 解答

(1)　$a_3=a_1+5=3,\ a_4=a_2+5=6,\ a_5=a_3+5=8,\ a_6=a_4+5=11$ より

$$c_3=a_5+a_6=8+11=19 \quad \cdots\cdots(答)$$

$b_3=4b_1=20,\ b_4=4b_2=-8,\ b_5=4b_3=80,\ b_6=4b_4=-32$ より

$$d_3=b_5+b_6=80-32=48 \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)　$a_1=-2,\ a_{2n+1}=a_{2n-1}+5\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ より $\{a_{2n-1}\}$ は初項 -2, 公差 5 の等差数列だから

$$a_{2n-1}=-2+(n-1)\times5=5n-7$$

$a_2=1,\ a_{2n+2}=a_{2n}+5\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ より $\{a_{2n}\}$ は初項 1，公差 5 の等差数列だから

$$a_{2n}=1+(n-1)\times5=5n-4$$

よって

$$c_n=a_{2n-1}+a_{2n}=5n-7+5n-4=10n-11 \quad \cdots\cdots(答)$$

$b_1=5,\ b_{2n+1}=4b_{2n-1}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ より $\{b_{2n-1}\}$ は初項 5，公比 4 の等比数列だから

$$b_{2n-1}=5\cdot4^{n-1}$$

$b_2=-2,\ b_{2n+2}=4b_{2n}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$ より $\{b_{2n}\}$ は初項 -2, 公比 4 の等比数列だから

$$b_{2n}=-2\cdot4^{n-1}$$

よって

$$d_n=b_{2n-1}+b_{2n}=5\cdot4^{n-1}-2\cdot4^{n-1}=3\cdot4^{n-1} \quad \cdots\cdots(答)$$

(3)
$$\begin{aligned}
S_{2n}&=\sum_{k=1}^{2n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+b_{2k-1})+\sum_{k=1}^{n}(a_{2k}+b_{2k})\\
&=\sum_{k=1}^{n}\{(a_{2k-1}+a_{2k})+(b_{2k-1}+b_{2k})\}=\sum_{k=1}^{n}(c_k+d_k)\\
&=\sum_{k=1}^{n}(10k-11+3\cdot4^{k-1})\\
&=10\times\frac{1}{2}n(n+1)-11n+\frac{3(4^n-1)}{4-1}\\
&=5n^2-6n+4^n-1 \quad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$