数　学

◀経済学部▶

1 解答

(1) $$x^4-x^2+16=(x^4+8x^2+16)-9x^2$$
$$=(x^2+4)^2-(3x)^2$$
$$=(x^2+4+3x)(x^2+4-3x)$$
$$=(x^2+3x+4)(x^2-3x+4) \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $$(1+\sqrt{6}+\sqrt{7})(1+\sqrt{6}-\sqrt{7})=(1+\sqrt{6})^2-7$$
$$=1+2\sqrt{6}+6-7$$
$$=2\sqrt{6}$$

$2\sqrt{6}=\sqrt{24}$ より　　$\sqrt{16}<2\sqrt{6}<\sqrt{25}$　　$4<2\sqrt{6}<5$

これより，整数部分 a は　　$a=4$

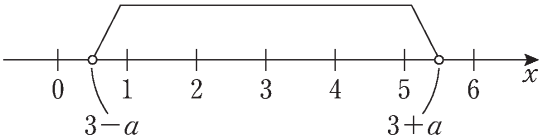
小数部分 b は　　$b=2\sqrt{6}-4$

$$a^2-8a-b^2-8b=a^2-b^2-8a-8b$$
$$=(a+b)(a-b)-8(a+b)$$
$$=(a+b)(a-b-8)$$
$$=2\sqrt{6}\times(-2\sqrt{6})=-24 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $|-x+3|=|x-3|$ より　　$|x-3|<a$

$-a<x-3<a$

$3-a<x<3+a$



この範囲に整数 x がちょうど5個存在する条件は

$0\leqq 3-a<1$　かつ　$5<3+a\leqq 6$

これより　　$2<a\leqq 3$　……(答)

2A 解答

(1)　起こりうるすべての場合は　　$6\times 6\times 6\times 6$ 通り

$d=0$ となるのは，$|a_1-a_3|+|a_2-a_4|=0$ より

$$a_1=a_3 \quad かつ \quad a_2=a_4$$

のときである。

$(a_1,\ a_3)$，$(a_2,\ a_4)$ はそれぞれ 6 通りずつあるから，$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ は　　6×6 通り

よって

$$P(d=0)=\frac{6\times 6}{6\times 6\times 6\times 6}=\frac{1}{36} \quad ……(答)$$

(2)　$d=1$ となるのは，$|a_1-a_3|+|a_2-a_4|=1$ より

$$|a_1-a_3|=1,\ |a_2-a_4|=0$$

または　$|a_1-a_3|=0,\ |a_2-a_4|=1$

$$a_1-a_3=\pm 1,\ a_2-a_4=0 \quad または \quad a_1-a_3=0,\ a_2-a_4=\pm 1$$

$$a_1=a_3\pm 1,\ a_2=a_4 \quad または \quad a_1=a_3,\ a_2=a_4\pm 1$$

$a_1=a_3\pm 1$ より

$(a_1,\ a_3)=(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (3,\ 4),$
$(4,\ 3),\ (4,\ 5),\ (5,\ 4),\ (5,\ 6),\ (6,\ 5)$ の 10 通り

$a_2=a_4$ より $(a_2,\ a_4)$ は 6 通り

であるから，$a_1=a_3\pm 1$，$a_2=a_4$ となる $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ は

$$10\times 6=60 \text{ 通り}$$

同様にして，$a_1=a_3$，$a_2=a_4\pm 1$ となる $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ も 60 通りあるから，$d=1$ となる場合は

$$60+60=120 \text{ 通り}$$

よって

$$P(d=1)=\frac{120}{6\times 6\times 6\times 6}=\frac{5}{54} \quad ……(答)$$

(3)　$d=2$ となるのは，$|a_1-a_3|+|a_2-a_4|=2$ より

(i) $|a_1-a_3|=2,\ |a_2-a_4|=0$

(ii) $|a_1-a_3|=1$，$|a_2-a_4|=1$

(iii) $|a_1-a_3|=0$，$|a_2-a_4|=2$

のいずれかである。

(i)は，$a_1=a_3\pm2$，$a_2=a_4$ より

$(a_1,\ a_3)=(1,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 1),\ (3,\ 5),$
$(4,\ 2),\ (4,\ 6),\ (5,\ 3),\ (6,\ 4)$　の 8 通り

$(a_2,\ a_4)$ は 6 通り

であるから，$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ は

$8\times6=48$ 通り

(ii)は，$a_1=a_3\pm1$，$a_2=a_4\pm1$ より，(2)と同様にして

$10\times10=100$ 通り

(iii)は，(i)と同様にして 48 通りであるから，$d=2$ となる場合は

$48+100+48=196$ 通り

したがって

$$P(d=2)=\frac{196}{6\times6\times6\times6}=\frac{49}{324}$$

よって

$$\begin{aligned}P(d\geqq3)&=1-P(d=0)-P(d=1)-P(d=2)\\&=1-\frac{1}{36}-\frac{5}{54}-\frac{49}{324}\\&=\frac{236}{324}=\frac{59}{81}\quad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

2B 解答

(1) 右の計算より

$2025=2210000_{(3)}$　……(答)

$$\begin{array}{r|rl}3 & 2025 & \\ 3 & 675 & \cdots0\\ 3 & 225 & \cdots0\\ 3 & 75 & \cdots0\\ 3 & 25 & \cdots0\\ 3 & 8 & \cdots1\\ 3 & 2 & \cdots2\\ & 0 & \cdots2\end{array}$$

(2) 方程式 $7x+5y=29$ の整数解の 1 つは $x=2$，$y=3$ である。

$$\begin{array}{rcccl} & 7x & + & 5y & =29\\ -) & 7\times2 & + & 5\times3 & =29\\ \hline & \multicolumn{4}{c}{7(x-2)+5(y-3)=0}\end{array}$$

$7(x-2)=-5(y-3)$ ……①

7と5は互いに素だから，$x-2$ は5の倍数より $x-2=5k$ とおくと，①より

$y-3=-7k$

よって

$(x,\ y)=(5k+2,\ -7k+3)$ （k は整数） ……(答)

(3) (i) $n=3k$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) のとき

$n^3+1=27k^3+1=3\cdot 9k^3+1$

より，3で割り切れない。

(ii) $n=3k-1$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) のとき

$n^3+1=(n+1)(n^2-n+1)=3k\{(3k-1)^2-(3k-1)+1\}$

より，3で割り切れる。

(iii) $n=3k-2$ ($k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) のとき

$$\begin{aligned} n^3+1&=(n+1)(n^2-n+1)\\ &=(3k-1)\{(3k-2)^2-(3k-2)+1\}\\ &=(3k-1)(9k^2-15k+7)\\ &=(3k-1)\{3(3k^2-5k+2)+1\} \end{aligned}$$

より，3で割り切れない。

(i)，(ii)，(iii)より

$n=3k-1$ （$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$） ……(答)

3 解答

(1) $f(x)=0$ の判別式を D とすると，重解をもつので

$$\frac{D}{4}=4m^2-4m-8=4(m^2-m-2)=4(m+1)(m-2)=0$$

$m=-1,\ 2$

このとき，重解 $2m>0$ より　$m>0$

すなわち　$m=2$ ……(答)

(2) $f(x)=0$ が異なる2つの正の解 α，β をもつので

$$\frac{D}{4}>0,\ \alpha+\beta>0,\ \alpha\beta>0$$

$\dfrac{D}{4}>0$ より　　$m<-1$，$2<m$　……①

解と係数の関係より

$\alpha+\beta=4m>0$ より　　$m>0$　……②

$\alpha\beta=4m+8>0$ より　　$m>-2$　……③

①，②，③の共通部分は

　$2<m$　……④

$|\alpha-\beta|=8\sqrt{7}$ より

　$448=|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16m^2-16m-32$

　$16m^2-16m-480=0$　　$m^2-m-30=0$

　$(m+5)(m-6)=0$　　$m=-5,\ 6$

④を満たす m の値は

　$m=6$　……(答)

(3)　$f(x)=(x-2m)^2-4m^2+4m+8$ より，グラフの軸の方程式は

　$x=2m$

(i) $2m<-2$ すなわち $m<-1$ のとき

　$x=-2$ で $f(x)$ は最小となり，最小値は

　　$f(-2)=4+8m+4m+8=12m+12$　……(答)

(ii) $-2\leqq 2m\leqq 4$ すなわち $-1\leqq m\leqq 2$ のとき

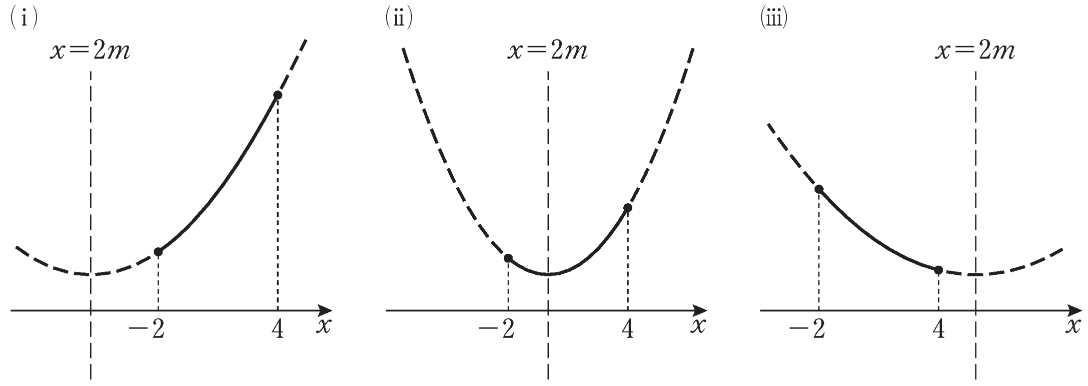
　$x=2m$ で $f(x)$ は最小となり，最小値は

　　$f(2m)=-4m^2+4m+8$　……(答)

(iii) $4<2m$ すなわち $2<m$ のとき

　$x=4$ で $f(x)$ は最小となり，最小値は

　　$f(4)=16-16m+4m+8=-12m+24$　……(答)



4 解答

(1) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ が 3 点 $(0,\ 6)$, $(1,\ 3)$, $(4,\ 6)$ を通るから

$$\begin{cases} 6=c & \cdots\cdots① \\ 3=a+b+c & \cdots\cdots② \\ 6=16a+4b+c & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①を②へ代入して

$a+b=-3$ ……④

①を③へ代入して

$16a+4b=0$　　$4a+b=0$ ……⑤

⑤－④ より　　$3a=3$　　$a=1$

④へ代入して　　$b=-4$

したがって, $(a,\ b,\ c)=(1,\ -4,\ 6)$ から放物線は

$y=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$

C の頂点の座標は　　$(2,\ 2)$ ……(答)

(2) $y=x^2-4x+6$ より

$y'=2x-4$

$x=4$ のとき

$y'=8-4=4$

接線の方程式は

$y-6=4(x-4)$　　$y=4x-10$

よって　　$p=4$, $q=-10$ ……(答)

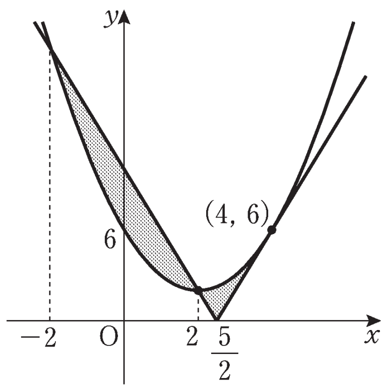
(3) $$y=|4x-10|=\begin{cases} -4x+10 & \left(x<\dfrac{5}{2}\right) \\ 4x-10 & \left(\dfrac{5}{2}\leqq x\right) \end{cases}$$

$\begin{cases} y=x^2-4x+6 \\ y=-4x+10 \end{cases}$ より

$x^2-4x+6=-4x+10$

$x^2=4$　　$x=\pm 2$

グラフは右図のようになるので



$$S=\int_{-2}^{2}(-4x+10-x^2+4x-6)dx+\int_{2}^{\frac{5}{2}}(x^2-4x+6+4x-10)dx$$
$$+\int_{\frac{5}{2}}^{4}(x^2-4x+6-4x+10)dx$$

$$=-\int_{-2}^{2}(x-2)(x+2)dx+\int_{2}^{\frac{5}{2}}(x^2-4)dx+\int_{\frac{5}{2}}^{4}(x-4)^2dx$$

$$=\frac{1}{6}\{2-(-2)\}^3+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_2^{\frac{5}{2}}+\left[\frac{(x-4)^3}{3}\right]_{\frac{5}{2}}^4$$

$$=\frac{32}{3}+\frac{125}{24}-10-\left(\frac{8}{3}-8\right)+\frac{9}{8}$$

$$=\frac{37}{3}\quad \cdots\cdots(答)$$

5 解答

(1) $a_3=a_1+5=3$, $a_4=a_2+5=6$, $a_5=a_3+5=8$, $a_6=a_4+5=11$ より

$$c_3=a_5+a_6=8+11=19\quad \cdots\cdots(答)$$

$b_3=4b_1=20$, $b_4=4b_2=-8$, $b_5=4b_3=80$, $b_6=4b_4=-32$ より

$$d_3=b_5+b_6=80-32=48\quad \cdots\cdots(答)$$

(2) $a_1=-2$, $a_{2n+1}=a_{2n-1}+5$ $(n=1, 2, \cdots)$ より $\{a_{2n-1}\}$ は初項 -2, 公差 5 の等差数列だから

$$a_{2n-1}=-2+(n-1)\times 5=5n-7$$

$a_2=1$, $a_{2n+2}=a_{2n}+5$ $(n=1, 2, \cdots)$ より $\{a_{2n}\}$ は初項 1，公差 5 の等差数列だから

$$a_{2n}=1+(n-1)\times 5=5n-4$$

よって

$$c_n=a_{2n-1}+a_{2n}=5n-7+5n-4=10n-11\quad \cdots\cdots(答)$$

$b_1=5$, $b_{2n+1}=4b_{2n-1}$ $(n=1, 2, \cdots)$ より $\{b_{2n-1}\}$ は初項 5，公比 4 の等比数列だから

$$b_{2n-1}=5\cdot 4^{n-1}$$

$b_2=-2$, $b_{2n+2}=4b_{2n}$ $(n=1, 2, \cdots)$ より $\{b_{2n}\}$ は初項 -2, 公比 4 の等比数列だから

$b_{2n}=-2\cdot4^{n-1}$

よって

$d_n=b_{2n-1}+b_{2n}=5\cdot4^{n-1}-2\cdot4^{n-1}=3\cdot4^{n-1}$　……(答)

(3)　$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1}+b_{2k-1})+\sum_{k=1}^{n}(a_{2k}+b_{2k})$

$=\sum_{k=1}^{n}\{(a_{2k-1}+a_{2k})+(b_{2k-1}+b_{2k})\}=\sum_{k=1}^{n}(c_k+d_k)$

$=\sum_{k=1}^{n}(10k-11+3\cdot4^{k-1})$

$=10\times\frac{1}{2}n(n+1)-11n+\frac{3(4^n-1)}{4-1}$

$=5n^2-6n+4^n-1$　……(答)