2024年度 一般選抜（2月11日）

数　学

◀工学部（社会環境工〈環境情報コース〉・生命工）▶

1 解答

(1)

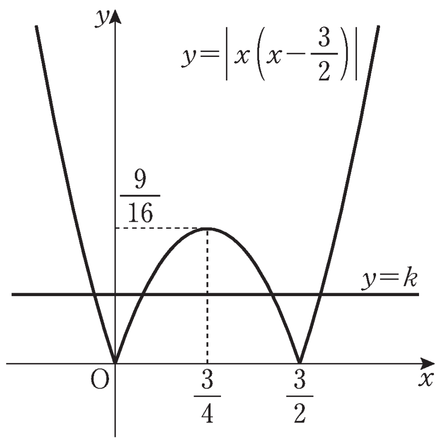
$$
\begin{aligned}
2x^3+7x^2+(2a+5)x+5a &= (2x+5)a+2x^3+7x^2+5x \\
&= (2x+5)a+x(2x^2+7x+5) \\
&= (2x+5)a+x(2x+5)(x+1) \\
&= (2x+5)(a+x^2+x) \\
&= (2x+5)(x^2+x+a) \quad \cdots\cdots\text{(答)}
\end{aligned}
$$

(2) 曲線 $y=\left|x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right|$ と直線 $y=k$ の共有点の個数を調べればよい。

$$
y=\left|x\left(x-\frac{3}{2}\right)\right|=\begin{cases} x\left(x-\dfrac{3}{2}\right) & \left(x\leqq 0,\ \dfrac{3}{2}\leqq x\right) \\ -x\left(x-\dfrac{3}{2}\right) & \left(0<x<\dfrac{3}{2}\right) \end{cases}
$$

より，グラフは右図のようになるので，実数解の個数は

$$
\left.\begin{array}{ll}
k<0 \text{ のとき} & 0\text{ 個} \\
k=0,\ \dfrac{9}{16}<k \text{ のとき} & 2\text{ 個} \\
k=\dfrac{9}{16} \text{ のとき} & 3\text{ 個} \\
0<k<\dfrac{9}{16} \text{ のとき} & 4\text{ 個}
\end{array}\right\} \cdots\cdots\text{(答)}
$$



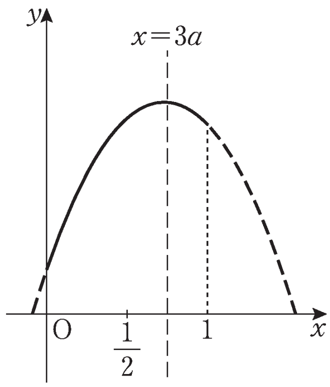
(3) $y=-(x^2-6ax)+3=-(x-3a)^2+9a^2+3$

グラフの軸は $x=3a$，$\dfrac{1}{6}<a<\dfrac{1}{3}$ より $\dfrac{1}{2}<3a<1$ であるから，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲でグラフは次図のようになるので

$x=3a$ のとき最大値 $9a^2+3$

$x=0$ のとき最小値 3

をとる。



$9a^2+3-3=\dfrac{1}{3}$ より

$$a^2=\frac{1}{27}$$

$\dfrac{1}{6}<a<\dfrac{1}{3}$ だから

$$a=\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

2 解答

(1)

$$\log_9\sqrt{256}=\frac{\log_2\sqrt{256}}{\log_2 9}=\frac{\log_2 16}{2\log_2 3}=\frac{4}{2\log_2 3}=\frac{2}{\log_2 3}$$

$$\log_3\sqrt{\sqrt[4]{256}}=\frac{\log_2\sqrt{\sqrt[4]{256}}}{\log_2 3}=\frac{\log_2 2}{\log_2 3}=\frac{1}{\log_2 3}$$

$$\log_8\sqrt[4]{81}=\frac{\log_2\sqrt[4]{81}}{\log_2 8}=\frac{\log_2 3}{3}$$

$$3\log_2\sqrt[3]{27}=3\log_2 3$$

であるから

$$(\text{与式})=\left(\frac{2}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_2 3}\right)\left(\frac{\log_2 3}{3}+3\log_2 3\right)$$

$$=\frac{3}{\log_2 3}\times\frac{10}{3}\log_2 3=10 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) 解と係数の関係より

$$\begin{cases}\sin\theta+\cos\theta=2a-1\\ \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{2}{3}a\end{cases}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta=1$$

$$(2a-1)^2+\frac{4}{3}a=1$$

$$4a^2-4a+1+\frac{4}{3}a=1$$

$$12a^2-12a+3+4a=3$$

$$12a^2-8a=0$$

$$4a(3a-2)=0$$

$a>0$ より

$$a=\frac{2}{3} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

このとき

$$3x^2-x-\frac{4}{3}=0$$

$$9x^2-3x-4=0$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+144}}{18}=\frac{3\pm\sqrt{153}}{18}=\frac{3\pm3\sqrt{17}}{18}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{6}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\sin\theta\geqq0$ なので

$$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{6},\ \cos\theta=\frac{1-\sqrt{17}}{6} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　$x=1$ が解だから

$$1-4+a+4-5=0$$

$\therefore$　$a=4$　……(答)

$$x^4-4x^3+4x^2+4x-5=0$$

$$(x-1)(x+1)(x^2-4x+5)=0$$

他の解は

$$x=2\pm i \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

3　解答

(1)　$$I_1=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} xe^{\sqrt{2}x}dx=\left[x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}x}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}-\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}x}dx$$

$$=\frac{1}{2}e-\left[\frac{1}{2}e^{\sqrt{2}x}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}e-\left(\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $$I_2=\int_0^3\frac{1}{\sqrt{8x+3}}dx=\left[\frac{1}{8}\cdot2\sqrt{8x+3}\right]_0^3=\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3) $I=I_1+iI_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ より

$$\overline{I}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$(\overline{I})^{2024}=\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{2024}$$

$$=\cos\left(-\frac{2024}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2024}{3}\pi\right)$$

（∵ド・モアブルの定理）

$$=\cos\frac{2024}{3}\pi-i\sin\frac{2024}{3}\pi$$

$$=\cos\left(674\pi+\frac{2}{3}\pi\right)-i\sin\left(674\pi+\frac{2}{3}\pi\right)$$

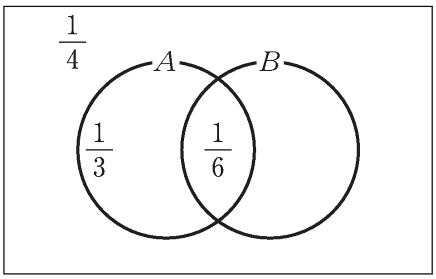
$$=\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi$$

$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

4 解答

(1) $$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$



$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1}{6}\times3$$

$$=\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $$P(B)=1-\{P(\overline{A}\cap\overline{B})+P(A)-P(A\cap B)\}$$

$$=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=1-\frac{3+4-2}{12}$$

$$=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$ ……(答)

(3) $$P_B(A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{1}{6}\times\frac{12}{7}=\frac{2}{7}$$ ……(答)

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(\overline{A})}=\left(\frac{7}{12}-\frac{1}{6}\right)\times\frac{3}{2}=\frac{5}{8}$$

だから

$$\frac{P_A(B)P(A)}{P_A(B)P(A)+P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{12}}$$

$$=\frac{1}{6}\times\frac{12}{7}=\frac{2}{7}$$ ……(答)

別解 $P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ より

$$P_A(B)P(A)=P(A\cap B)$$

$P_{\overline{A}}(B)=\dfrac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}$ より

$$P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})=P(\overline{A}\cap B)$$

であるから

$$\frac{P_A(B)P(A)}{P_A(B)P(A)+P_{\overline{A}}(B)P(\overline{A})}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{5}{12}}=\frac{1}{6}\times\frac{12}{7}=\frac{2}{7}$$

5 解答

(1) $b_n=2+(n-1)\cdot 5=5n-3$ ……(答)

$\{a_n\}$：2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, …

$\{b_n\}$：2, 7, 12, 17, 22, …

$c_2=17$ ……(答)

(2)　$\{c_n\}$ は初項 2，公差 15（3 と 5 の最小公倍数）の等差数列であるから

$$c_n=2+(n-1)\cdot 15=15n-13 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　$a_n \leqq 100$ より

$$3n-1 \leqq 100$$

$$3n \leqq 101 \qquad \therefore \quad n \leqq \frac{101}{3}=33.6\cdots$$

$c_n \leqq 100$ より

$$15n-13 \leqq 100$$

$$15n \leqq 113 \qquad \therefore \quad n \leqq \frac{113}{15}=7.53\cdots$$

であるから

$$S=\sum_{k=1}^{33} a_k-\sum_{k=1}^{7} c_k=\sum_{k=1}^{33}(3k-1)-\sum_{k=1}^{7}(15k-13)$$

$$=3\times\frac{1}{2}\times 33\times 34-33-\left(15\times\frac{1}{2}\times 7\times 8-13\times 7\right)$$

$$=1683-33-(420-91)$$

$$=1321 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$