

数 学

◀法学部 1 部・2 部，経営学部 1 部（経営情報）▶

1

解答

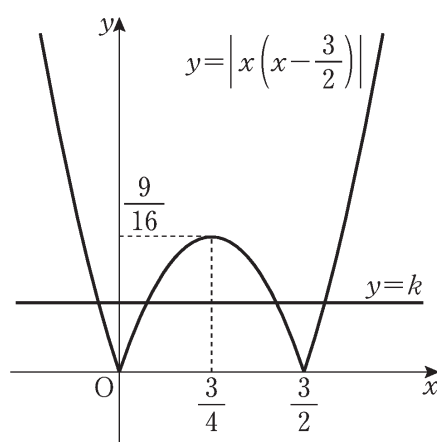
$$\begin{aligned}
 (1) \quad 2x^3 + 7x^2 + (2a+5)x + 5a &= (2x+5)a + 2x^3 + 7x^2 + 5x \\
 &= (2x+5)a + x(2x^2 + 7x + 5) \\
 &= (2x+5)a + x(2x+5)(x+1) \\
 &= (2x+5)(a + x^2 + x) \\
 &= (2x+5)(x^2 + x + a) \quad \cdots \cdots (\text{答})
 \end{aligned}$$

(2) 曲線 $y = \left| x \left(x - \frac{3}{2} \right) \right|$ と直線 $y = k$ の共有点の個数を調べればよい。

$$y = \left| x \left(x - \frac{3}{2} \right) \right| = \begin{cases} x \left(x - \frac{3}{2} \right) & (x \leq 0, \frac{3}{2} \leq x) \\ -x \left(x - \frac{3}{2} \right) & (0 < x < \frac{3}{2}) \end{cases}$$

より，グラフは右図のようになるので，実数解の個数は

$$\left. \begin{array}{ll} k < 0 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ k = 0, \frac{9}{16} < k \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ k = \frac{9}{16} \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \\ 0 < k < \frac{9}{16} \text{ のとき} & 4 \text{ 個} \end{array} \right\} \cdots \cdots (\text{答})$$



$$(3) \quad y = -(x^2 - 6ax) + 3 = -(x - 3a)^2 + 9a^2 + 3$$

グラフの軸は $x=3a$, $\frac{1}{6} < a < \frac{1}{3}$ より $\frac{1}{2} < 3a < 1$ であるから, $0 \leq x \leq 1$ の範囲でグラフは次図のようになるので

$x=3a$ のとき最大値 $9a^2+3$

$x=0$ のとき最小値 3

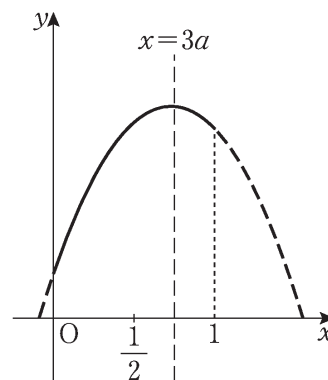
をとる。

$$9a^2+3-3=\frac{1}{3} \text{ より}$$

$$a^2=\frac{1}{27}$$

$$\frac{1}{6} < a < \frac{1}{3} \text{ だから}$$

$$a=\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9} \quad \dots\dots(\text{答})$$



2 解答

(1) 例えば 6 本のペンを A, B, C の 3 人に分配するとき

A に 3 本, B に 2 本, C に 1 本分配することを ○○○|○○|○

A に 2 本, B に 0 本, C に 4 本分配することを ○○||○○○○

のように表す。

あらかじめ, A, B, C に黒ペンを 1 本ずつ配布し, 赤ペン 4 本と黒ペンの残り 7 本を A, B, C の 3 人に分配する方法を考える。

赤ペンは ○○○○|| の順列だけ分配方法があるから

$${}_6C_2=\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}=15 \text{ 通り}$$

黒ペンは ○○○○○○○|| の順列だけ分配方法があるから

$${}_9C_2=\frac{9\cdot 8}{2\cdot 1}=36 \text{ 通り}$$

よって

$$15\times 36=540 \text{ 通り} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad \begin{cases} y=x^2-2(a+1)x+a^2+ab-3b \\ y=0 \end{cases}$$

より

$$x^2 - 2(a+1)x + a^2 + ab - 3b = 0$$

放物線と x 軸が接するから、判別式を D とすると $D=0$ となるので

$$\frac{D}{4} = (a+1)^2 - a^2 - ab + 3b = -ab + 2a + 3b + 1 = 0$$

$$ab - 2a - 3b - 1 = 0$$

$$a(b-2) - 3(b-2) - 6 - 1 = 0$$

$$(a-3)(b-2) = 7$$

$a-3$, $b-2$ は整数だから

$$(a-3, b-2) = (1, 7), (7, 1), (-1, -7), (-7, -1)$$

$$(a, b) = (4, 9), (10, 3), (2, -5), (-4, 1) \dots\dots(\text{答})$$

(3) $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$ だから、2024 の正の約数は

$$2^x \times 11^y \times 23^z \quad (x, y, z \text{ は整数}, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1)$$

で表される数である。総和 S は

$$S = (1+2+2^2+2^3)(1+11)(1+23)$$

$$= 15 \times 12 \times 24 = 4320 \dots\dots(\text{答})$$

5 進法では

$$S = 114240_{(5)} \dots\dots(\text{答})$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 4320} \\ 5 \overline{) 864} \quad \dots 0 \\ 5 \overline{) 172} \quad \dots 4 \\ 5 \overline{) 34} \quad \dots 2 \\ 5 \overline{) 6} \quad \dots 4 \\ 5 \overline{) 1} \quad \dots 1 \\ 0 \quad \dots 1 \end{array}$$

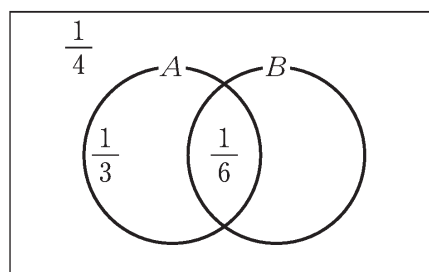
3 解答

$$(1) \quad P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \dots\dots(\text{答})$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{6} \times 3$$

$$= \frac{1}{2} \dots\dots(\text{答})$$



$$(2) \quad P(B) = 1 - \{P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(A) - P(A \cap B)\}$$

$$=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=1-\frac{3+4-2}{12}$$

$$=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(3) \quad P_B(A)=\frac{P(B\cap A)}{P(B)}=\frac{1}{6}\times\frac{12}{7}=\frac{2}{7} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$P_{\bar{A}}(B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(\bar{A})}=\left(\frac{7}{12}-\frac{1}{6}\right)\times\frac{3}{2}=\frac{5}{8}$$

だから

$$\begin{aligned} \frac{P_A(B)P(A)}{P_A(B)P(A)+P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})} &= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{12}} \\ &= \frac{1}{6}\times\frac{12}{7}=\frac{2}{7} \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

別解 $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ より

$$P_A(B)P(A)=P(A\cap B)$$

$$P_{\bar{A}}(B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(\bar{A})} \text{ より}$$

$$P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})=P(\bar{A}\cap B)$$

であるから

$$\begin{aligned} \frac{P_A(B)P(A)}{P_A(B)P(A)+P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})} &= \frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)} \\ &= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{5}{12}} = \frac{1}{6}\times\frac{12}{7}=\frac{2}{7} \end{aligned}$$

4 解答

$$(1) \quad f'(x)=3(x^2-1)=3(x+1)(x-1)$$

$f'(x)=0$ となる x の値は

$$x=-1, 1$$

増減表より, $x=-1$ で極大, $x=1$ で極小
となるから

$$\alpha=-1, \beta=1 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) $f'(x)=3x^2-3$ より

$$f(x)=\int(3x^2-3)dx=x^3-3x+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$f(2)=4 \text{ より}$$

$$8-6+C=4$$

$$C=2$$

よって

$$f(x)=x^3-3x+2 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(3) $f(-1)=-1+3+2=4, \quad f(1)=1-3+2=0$

放物線 $y=x^2+bx+c$ が 2 点 $(-1, 4), (1, 0)$ を通るから

$$4=1-b+c$$

$$b-c=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$0=1+b+c$$

$$b+c=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①+② より

$$2b=-4 \quad \therefore b=-2$$

②へ代入して

$$-2+c=-1 \quad \therefore c=1$$

$$S=\int_{-1}^1(x^3-3x+2-x^2+2x-1)dx$$

$$=\int_{-1}^1(x^3-x^2-x+1)dx$$

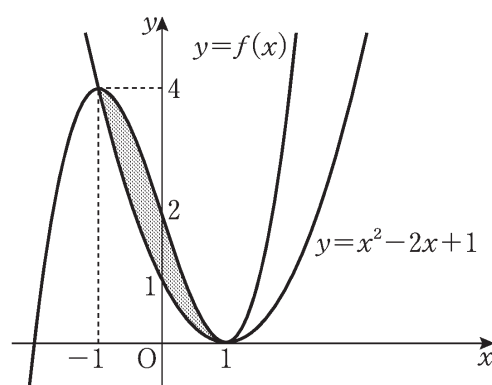
$$=2\int_0^1(-x^2+1)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1$$

$$=2\left(-\frac{1}{3}+1\right)$$

$$=\frac{4}{3} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$



$$(1) \quad b_n = 2 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 3 \quad \dots\dots (\text{答})$$

$$\{a_n\} : \textcircled{2}, 5, 8, 11, 14, \textcircled{17}, 20, \dots$$

$$\{b_n\} : \textcircled{2}, 7, 12, \textcircled{17}, 22, \dots$$

$$c_2 = 17 \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) $\{c_n\}$ は初項 2, 公差 15 (3 と 5 の最小公倍数) の等差数列であるから

$$c_n = 2 + (n-1) \cdot 15 = 15n - 13 \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) $a_n \leq 100$ より

$$3n - 1 \leq 100$$

$$3n \leq 101 \quad \therefore n \leq \frac{101}{3} = 33.6\dots$$

$c_n \leq 100$ より

$$15n - 13 \leq 100$$

$$15n \leq 113 \quad \therefore n \leq \frac{113}{15} = 7.53\dots$$

であるから

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{33} a_k - \sum_{k=1}^7 c_k = \sum_{k=1}^{33} (3k-1) - \sum_{k=1}^7 (15k-13) \\ &= 3 \times \frac{1}{2} \times 33 \times 34 - 33 - \left(15 \times \frac{1}{2} \times 7 \times 8 - 13 \times 7 \right) \\ &= 1683 - 33 - (420 - 91) \\ &= 1321 \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$