2024年度 一般選抜（2月10日）

数　学

◀工学部（社会環境工〈社会環境コース〉・電子情報工）▶

1 解答

(1)
$$\begin{aligned} x^2-6x+9-9y^2 &= (x-3)^2-(3y)^2 \\ &= (x-3+3y)(x-3-3y) \\ &= (x+3y-3)(x-3y-3) \quad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

(2) 平均値を m，分散を s^2 とすると

$$m=\frac{1}{5}(14+22+18+36+5n)=n+18$$

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{5}\{(14-m)^2+(22-m)^2+(18-m)^2+(36-m)^2+(5n-m)^2\} \\ &= \frac{1}{5}\{(-n-4)^2+(-n+4)^2+n^2+(-n+18)^2+(4n-18)^2\} \\ &= \frac{1}{5}(20n^2-180n+680) \\ &= 4n^2-36n+136 \end{aligned}$$

$s^2=64$ より

$$4n^2-36n+136=64$$
$$4n^2-36n+72=0$$
$$n^2-9n+18=0$$
$$(n-3)(n-6)=0$$
$$\therefore \quad n=3,\ 6 \quad \cdots\cdots(答)$$

(3) $1-i$ が解だから

$$(1-i)^3+a(1-i)^2+b=0$$

$$1-3i+3i^2-i^3+a(1-2i+i^2)+b=0$$

$$(b-2)+(-2a-2)i=0$$

a，b は実数だから

$$b-2=0,\quad -2a-2=0$$

よって

$$a=-1,\quad b=2 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

このとき

$$x^3-x^2+2=0$$

$$(x+1)(x^2-2x+2)=0$$

他の解は

$$x=-1,\quad 1+i \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

別解　実数係数の3次方程式より，$1-i$ が解だから，共役複素数 $1+i$ も解となる。

$$(1-i)+(1+i)=2,\quad (1-i)(1+i)=1-i^2=2$$

より，解と係数の関係より x^2-2x+2 が左辺の因数になる。

$$x^3+ax^2+b=(x^2-2x+2)\left(x+\frac{b}{2}\right)$$

$$=x^3+\left(\frac{b}{2}-2\right)x^2+(-b+2)x+b$$

x についての恒等式だから

$$a=\frac{b}{2}-2,\quad -b+2=0$$

これより　　$a=-1$，$b=2$

残りの解は　　$x=-1$，$1+i$

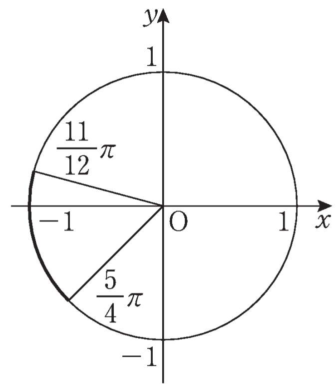
② 解答

(1) $t=\sin 2x+\cos 2x$

$$=\sqrt{2}\left(\sin 2x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\cos 2x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(\sin 2x\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2x\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$$



$\frac{\pi}{3}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ より

$$\frac{11}{12}\pi\leqq 2x+\frac{\pi}{4}\leqq\frac{5}{4}\pi$$

ここで

$$\sin\frac{11}{12}\pi=\sin\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sin\frac{2}{3}\pi\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{2}{3}\pi\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

だから

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

となるので

$$-1\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}-1}{2}\quad\cdots\cdots(答)$$

(2) $t^2=(\sin 2x+\cos 2x)^2$

$$=\sin^2 2x+2\sin 2x\cos 2x+\cos^2 2x$$

$$=1+\sin 4x$$

より

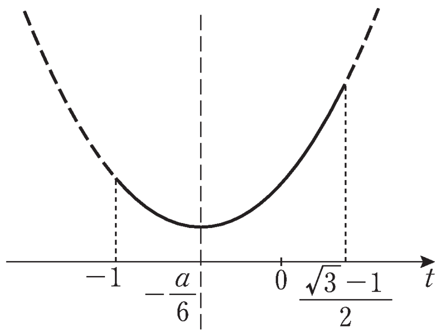
$$\sin 4x=t^2-1\quad\cdots\cdots(答)$$

$$y=3(t^2-1)+at+1=3t^2+at-2\quad\cdots\cdots(答)$$

(3)　$y=3\left(t^2+\dfrac{a}{3}t\right)-2=3\left(t+\dfrac{a}{6}\right)^2-\dfrac{a^2}{12}-2$

グラフの軸は $t=-\dfrac{a}{6}$ であり，$0<a<6$ より $-1<-\dfrac{a}{6}<0$ であるから，

$-1\leqq t\leqq\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ の範囲で $t=-\dfrac{a}{6}$ のとき最小となる。



最小値は　$-\dfrac{a^2}{12}-2$　……(答)

3 解答

(1)　$f(x)=(x^2-5)^3$ より

$$f'(x)=3(x^2-5)^2(x^2-5)'=6x(x^2-5)^2$$

$f'(x)=0$ となる x の値は

$$x=0,\ \pm\sqrt{5}\quad\cdots\cdots(答)$$

(2)
$$\int_a^{a+y}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}\right]_a^{a+y}$$
$$=\frac{1}{3}(a+y)^3-\frac{1}{a+y}-\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{a}\right)$$
$$=\frac{1}{3}(a^3+3a^2y+3ay^2+y^3)-\frac{1}{a+y}-\frac{1}{3}a^3+\frac{1}{a}$$
$$=\frac{1}{3}y(3a^2+3ay+y^2)+\frac{y}{a(a+y)}$$

であるから

$$\lim_{y\to0}\left\{\frac{1}{y}\int_a^{a+y}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx\right\}=\lim_{y\to0}\left\{\frac{1}{3}(3a^2+3ay+y^2)+\frac{1}{a(a+y)}\right\}$$
$$=a^2+\frac{1}{a^2}\quad\cdots\cdots(答)$$

別解　$f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ とおき，$f(x)$ の不定積分の１つを $F(x)$ とすると

$$\lim_{y\to 0}\left\{\frac{1}{y}\int_a^{a+y} f(x)dx\right\}=\lim_{y\to 0}\left\{\frac{1}{y}\Big[F(x)\Big]_a^{a+y}\right\}=\lim_{y\to 0}\frac{F(a+y)-F(a)}{y}$$

$$=F'(a)=f(a)=a^2+\frac{1}{a^2}$$

(3) $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1+\sqrt{3}\,i)=\sqrt{2}\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

より，ド・モアブルの定理から

$$\alpha^n=\sqrt{2}^{\,n}\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)^n=\sqrt{2}^{\,n}\left(\cos\frac{2n}{3}\pi+i\sin\frac{2n}{3}\pi\right)$$

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$$

より，ド・モアブルの定理から

$$\beta^n=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n=\cos\frac{n}{4}\pi+i\sin\frac{n}{4}\pi$$

3 点 O，A，B が一直線上にあるような最小の n は 3 と 4 の最小公倍数の $n=12$ であり，このとき $\mathrm{A}(2^6)$，$\mathrm{B}(-1)$ であるから

$d=2^6+1=65$ ……(答)

4 解答

(1) 起こりうるすべての場合は $6\times6\times6$ 通りある。

n の正の約数の個数が 1 個になるのは $n=1$ のときで，このとき

$(n_1,\ n_2,\ n_3)=(1,\ 1,\ 1)$

の 1 通り。

よって，求める確率は

$\dfrac{1}{6\times6\times6}=\dfrac{1}{216}$ ……(答)

(2) n の正の約数の個数が 2 個となるのは $n=2,\ 3,\ 5$ のときであり

$n=2$ のとき，$(n_1,\ n_2,\ n_3)=(1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1)$ の 3 通り。

$n=3,\ 5$ のときもそれぞれ 3 通りずつある。

よって，n の正の約数の個数が 2 個となる確率は

$$\frac{9}{6\times6\times6}=\frac{9}{216}$$

(1)の結果も合わせて n の正の約数の個数が 3 個以上となる確率は

$$1-\frac{1}{216}-\frac{9}{216}=\frac{206}{216}=\frac{103}{108}\quad\cdots\cdots(答)$$

(3) n の正の約数の個数が 5 個となるのは $n=2^4$ のときで，このとき

$$(n_1,\ n_2,\ n_3)=(1,\ 2^2,\ 2^2),\ (2^2,\ 1,\ 2^2),\ (2^2,\ 2^2,\ 1),$$
$$(2,\ 2,\ 2^2),\ (2,\ 2^2,\ 2),\ (2^2,\ 2,\ 2)$$

の 6 通りであるから求める確率は

$$\frac{6}{6\times6\times6}=\frac{1}{36}\quad\cdots\cdots(答)$$

5 解答

(1) $\vec{a}\cdot\vec{e}=x\times1+y\times0=x\quad\cdots\cdots(答)$

$|\vec{a}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{e})^2=x^2+y^2-x^2=y^2\quad\cdots\cdots(答)$

(2) $\vec{b}-\vec{a}=\vec{e}$ より

$$\begin{aligned}(\vec{b}-\vec{a})\cdot\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}&=\vec{e}\cdot\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\\&=(1-t)\vec{a}\cdot\vec{e}+t\vec{b}\cdot\vec{e}\\&=(1-t)\vec{a}\cdot\vec{e}+t(\vec{a}+\vec{e})\cdot\vec{e}\\&=\vec{a}\cdot\vec{e}+t|\vec{e}|^2=x+t=0\end{aligned}$$

より　　$x=-t$

$0\leqq t\leqq 1$ より

$-1\leqq x\leqq 0\quad\cdots\cdots(答)$

このとき

$$\begin{aligned}\vec{c}&=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\\&=(1-t)\vec{a}+t(\vec{a}+\vec{e})\\&=\vec{a}+t\vec{e}\\&=(x+t,\ y)=(0,\ y)\quad\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

(3) $\vec{c}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=(1-t)\vec{a}+t(\vec{a}+\vec{e})=\vec{a}+t\vec{e}=(x+t,\ y)$

より

$$|\vec{c}|^2=(x+t)^2+y^2=(t+x)^2+y^2=f(t)$$

とおく。

グラフの軸は $t=-x$ であるから

(i) $-x<0$ すなわち $0<x$ のとき

$f(t)$ は $t=0$ のとき最小，このとき $|\vec{c}|$ の最小値は

$$\sqrt{x^2+y^2} \quad \cdots\cdots(答)$$

(ii) $0\leqq -x\leqq 1$ すなわち $-1\leqq x\leqq 0$ のとき $f(t)$ は $t=-x$ のとき最小，

このとき $|\vec{c}|$ の最小値は

$$\sqrt{y^2}=|y| \quad \cdots\cdots(答)$$

(iii) $1<-x$ すなわち $x<-1$ のとき $f(t)$ は $t=1$ のとき最小，このとき

$|\vec{c}|$ の最小値は

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} \quad \cdots\cdots(答)$$