

2024 年度 一般選抜（2月10日）

数 学

◀経済学部・経営学部（経営）▶

1

解答

$$\begin{aligned}(1) \quad (x^2 - 6x + 9) - 9y^2 &= (x - 3)^2 - (3y)^2 \\ &= (x - 3 + 3y)(x - 3 - 3y) \\ &= (x + 3y - 3)(x - 3y - 3) \quad \cdots \cdots (\text{答})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{別解} \quad x^2 - 6x - 9(y^2 - 1) &= x^2 - 6x - 3(y + 1) \cdot 3(y - 1) \\ &= \{x + 3(y - 1)\}\{x - 3(y + 1)\} \\ &= (x + 3y - 3)(x - 3y - 3)\end{aligned}$$

(2) 平均値を m ，標準偏差を s とすると

$$m = \frac{1}{5}(14 + 22 + 18 + 36 + 5n) = n + 18$$

$$s^2 = \frac{1}{5}\{(14 - m)^2 + (22 - m)^2 + (18 - m)^2 + (36 - m)^2 + (5n - m)^2\}$$

$$= \frac{1}{5}\{(-n - 4)^2 + (-n + 4)^2 + n^2 + (-n + 18)^2 + (4n - 18)^2\}$$

$$= \frac{1}{5}(20n^2 - 180n + 680)$$

$$= 4n^2 - 36n + 136$$

$s = 8$ より

$$4n^2 - 36n + 136 = 64$$

$$4n^2 - 36n + 72 = 0$$

$$n^2 - 9n + 18 = 0$$

$$(n - 3)(n - 6) = 0$$

$$n=3, 6$$

よって

$$m=21, 24 \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) $y=(x-a)^2-a^2-4$ より, C の頂点の座標は $(a, -a^2-4)$ である。

C を原点に関して対称移動して得られる放物線の方程式は

$$-y=(-x-a)^2-a^2-4$$

$$y=-(x+a)^2+a^2+4$$

これが $(a, -a^2-4)$ を通るから

$$-a^2-4=-(a+a)^2+a^2+4$$

$$-a^2-4=-4a^2+a^2+4$$

$$2a^2=8$$

$$a^2=4 \quad \therefore a=\pm 2 \quad \dots\dots(\text{答})$$

2

解答

(1) 三角形の内角の和は π だから

$$A+B+C=\pi$$

これより

$$B+C=\pi-A$$

$$\tan \frac{B+C}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \frac{1}{\tan \frac{A}{2}} = 2 + \sqrt{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$(2) \quad 2^{11} - (2^4 + 2^3) = 2048 - (16 + 8) = 2024$$

$2 \overline{) 2024}$		$8 \overline{) 2024}$	
$2 \overline{) 1012}$	...0 ↑	$8 \overline{) 253}$	...0 ↑
$2 \overline{) 506}$	...0	$8 \overline{) 31}$	...5
$2 \overline{) 253}$	...0	$8 \overline{) 3}$	...7
$2 \overline{) 126}$	...1	0	...3
$2 \overline{) 63}$	...0		
$2 \overline{) 31}$	...1		
$2 \overline{) 15}$	...1		
$2 \overline{) 7}$	...1		
$2 \overline{) 3}$	...1		
$2 \overline{) 1}$	...1		
0	...1		

$$2024 = 11111101000_{(2)} = 3750_{(8)} \quad \dots\dots (\text{答})$$

(3) ミニカーを x 個, ぬいぐるみを y 個買うとすると

$$400x + 900y = 8500 \quad (x, y \text{ は自然数})$$

$$4x + 9y = 85$$

$$4x = 85 - 9y$$

$x \geq 1$ より, $4x \geq 4$ だから

$$85 - 9y \geq 4$$

$$9y \leq 81$$

$$y \leq 9$$

y は自然数だから

$$1 \leq y \leq 9$$

$$y=1 \text{ のとき} \quad 4x=76 \quad \therefore x=19$$

$$y=2 \text{ のとき} \quad 4x=67 \quad \therefore x=\frac{67}{4}$$

$$y=3 \text{ のとき} \quad 4x=58 \quad \therefore x=\frac{29}{2}$$

$$y=4 \text{ のとき} \quad 4x=49 \quad \therefore x=\frac{49}{4}$$

$$y=5 \text{ のとき} \quad 4x=40 \quad \therefore x=10$$

$$y=6 \text{ のとき} \quad 4x=31 \quad \therefore x=\frac{31}{4}$$

$$y=7 \text{ のとき} \quad 4x=22 \quad \therefore x=\frac{11}{2}$$

$$y=8 \text{ のとき} \quad 4x=13 \quad \therefore x=\frac{13}{4}$$

$$y=9 \text{ のとき} \quad 4x=4 \quad \therefore x=1$$

x, y がともに自然数であるものは

$(x, y) = (1, 9), (10, 5), (19, 1)$ の 3 通り ……(答)

3

解答

(1) 起こりうるすべての場合は $6 \times 6 \times 6$ 通りある。

n の正の約数の個数が 2 個以下となるのは、 $n=1, 2, 3, 5$ のときで

$n=1$ のときは $(n_1, n_2, n_3) = (1, 1, 1)$

$n=2$ のときは $(n_1, n_2, n_3) = (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)$

$n=3, n=5$ のときも 3 通りずつあるので、 n の正の約数の個数が 2 個以下となる場合は

$$1 + 3 \times 3 = 10 \text{ 通り}$$

その確率は

$$\frac{10}{6 \times 6 \times 6} = \frac{5}{108}$$

よって、 n の正の約数の個数が 3 個以上となる確率は、余事象を考えて

$$1 - \frac{5}{108} = \frac{103}{108} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(2) n の正の約数の個数が 7 個となるのは、 $n=2^6$ のときで

$$(n_1, n_2, n_3) = (4, 4, 4)$$

の 1 通りである。

n の正の約数の個数が 7 個となる確率は

$$\frac{1}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{216} \quad \dots\dots(\text{答})$$

(3) n の正の約数の個数が 9 個となるのは、 $n=2^2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 5^2$ のときで

$n=2^2 \cdot 3^2$ のとき、 n_1, n_2, n_3 の組合せは $\{1, 6, 6\}, \{2, 3, 6\},$

$\{3, 3, 4\}$ であり, それぞれ (n_1, n_2, n_3) は 3 通り, $3!$ 通り, 3 通りであるから

$$3+3!+3=12 \text{ 通り}$$

$n=2^2 \cdot 5^2$ のとき, n_1, n_2, n_3 の組合せは $\{4, 5, 5\}$ であり, (n_1, n_2, n_3) は 3 通り。

n の正の約数の個数が 9 個である場合は

$$12+3=15 \text{ 通り}$$

よって, 求める確率は

$$\frac{15}{6 \times 6 \times 6} = \frac{5}{72} \quad \dots\dots (\text{答})$$

4

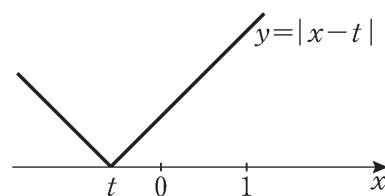
解答

(1) $t < 0$ のとき, $0 \leq x \leq 1$ の範囲で

$$|x-t| = x-t$$

だから

$$\begin{aligned} \int_0^1 x|x-t|dx &= \int_0^1 (x^2 - tx)dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}tx^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}t \quad \dots\dots (\text{答}) \end{aligned}$$



(2) $0 \leq t \leq 1$ のとき, $0 \leq x \leq t$ の範囲で

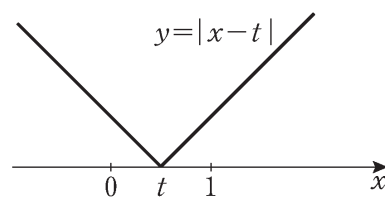
$$|x-t| = -x+t$$

$t \leq x \leq 1$ の範囲で

$$|x-t| = x-t$$

だから

$$\begin{aligned} \int_0^1 x|x-t|dx &= \int_0^t (-x^2 + tx)dx + \int_t^1 (x^2 - tx)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}tx^2 \right]_0^t + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}tx^2 \right]_t^1 \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}t - \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^3 \right) \end{aligned}$$



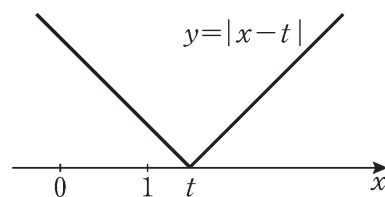
$$= \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}$$

$1 < t$ のとき, $0 \leq x \leq 1$ の範囲で

$$|x - t| = -x + t$$

だから

$$\begin{aligned} \int_0^1 x|x-t|dx &= \int_0^1 (-x^2 + tx)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}tx^2 \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}t \end{aligned}$$



よって

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{1}{2}t & (t < 0 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3} & (0 \leq t \leq 1 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{2}t & (1 < t \text{ のとき}) \end{cases}$$

$0 \leq t \leq 1$ のとき

$$f'(t) = t^2 - \frac{1}{2} = \left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$f'(t) = 0$ となる t の値は, $0 \leq t \leq 1$ より

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$f(t)$ は $t < 0$ のとき単調減少, $1 < t$ のとき
単調増加であるから, $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $f(t)$

は最小値 $\frac{2 - \sqrt{2}}{6}$ をとる。……(答)

t	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	1
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} (3) \quad \int_{-1}^2 f(t)dt &= \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}t\right)dt + \int_0^1 \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}\right)dt \\ &\quad + \int_1^2 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}t\right)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t - \frac{1}{4}t^2\right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{12}t^4 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{3}t\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}t + \frac{1}{4}t^2\right]_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{12}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+1-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{7}{6} \quad \cdots \cdots (\text{答})
\end{aligned}$$

5

解答

$$(1) \quad a_2 = ba_1 = ab$$

$$a_3 = b(a_1 + a_2) = b(a + ab) = ab + ab^2$$

$$a_4 = b(a_1 + a_2 + a_3) = b(a + ab + ab + ab^2) = ab + 2ab^2 + ab^3$$

よって

$$a_4 - a_3 = ab^2 + ab^3 = ab^2(b+1) \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{ab(b^2 + 2b + 1)}{ab(b+1)} = \frac{ab(b+1)^2}{ab(b+1)} = b+1 \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

(2) $n \geq 2$ のとき

$$a_{n+1} - a_n = b \sum_{k=1}^n a_k - b \sum_{k=1}^{n-1} a_k = ba_n$$

より

$$a_{n+1} = (b+1)a_n$$

$\{a_n\}$ は第 2 項から公比 $b+1$ の等比数列となるので

$$a_n = a_2(b+1)^{n-2} = ab(b+1)^{n-2} \quad (n \geq 2) \quad \cdots \cdots (\text{答})$$

$$(3) \quad \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \sum_{k=2}^n a_k = a + ab \sum_{k=2}^n (b+1)^{k-2}$$

$$= a + ab \cdot \frac{(b+1)^{n-1} - 1}{b+1 - 1}$$

$$= a + a\{(b+1)^{n-1} - 1\}$$

$$= a(b+1)^{n-1} \quad \cdots \cdots (\text{答})$$