2024年度 一般選抜（2月9日）

数　学

◀経済学部▶

1 解答

(1)　$\{x+(2y+3z)\}^2-\{-x+(2y+3z)\}^2+\{x-(2y-3z)\}^2-\{x+(2y-3z)\}^2$

$=x^2+2x(2y+3z)+(2y+3z)^2-\{x^2-2x(2y+3z)+(2y+3z)^2\}$
$\quad+x^2-2x(2y-3z)+(2y-3z)^2-\{x^2+2x(2y-3z)+(2y-3z)^2\}$

$=4x(2y+3z)-4x(2y-3z)=24xz$　……(答)

(2)　$pq+(5p+q)\sqrt{7}+35=27+6\sqrt{7}$

$(5p+q-6)\sqrt{7}=-pq-8$　……①

$5p+q-6\neq0$ と仮定すると，①より $\sqrt{7}=\dfrac{-pq-8}{5p+q-6}$ となり，p，q は有理数だから $\sqrt{7}$ も有理数となって，$\sqrt{7}$ が無理数であることと矛盾する。

よって，背理法より

$5p+q-6=0$　……②

このとき①より

$-pq-8=0$　……③

②より

$q=-5p+6$

③へ代入して

$-p(-5p+6)-8=0$

$5p^2-6p-8=0$

$(5p+4)(p-2)=0$

$\therefore \quad p=-\dfrac{4}{5},\ 2$

$p=-\dfrac{4}{5}$ のとき $q=10$，$p=2$ のとき $q=-4$ である。

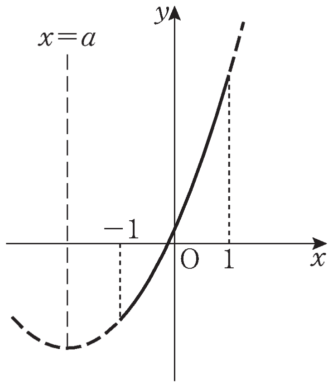
$p<q$ より

$$p=-\frac{4}{5},\ q=10 \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

(3)　$f(x)=(x-a)^2-a^2+8b$ よりグラフの軸は $x=a$ である。

$|a|\geqq 1$ より，$a\leqq -1$ または $1\leqq a$ である。

(i) $a\leqq -1$ のとき



$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，$x=1$ のとき最大値 $1-2a+8b$，$x=-1$ のとき最小値 $1+2a+8b$ をとる。

$1-2a+8b=7$ より

$$a-4b=-3 \quad \cdots\cdots①$$

$1+2a+8b=-7$ より

$$a+4b=-4 \quad \cdots\cdots②$$

①+② より

$$2a=-7 \qquad \therefore \quad a=-\frac{7}{2}$$

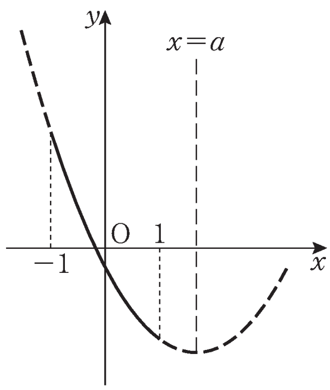
これは $a\leqq -1$ を満たす。

②へ代入して

$$-\frac{7}{2}+4b=-4$$

$$4b=-\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad b=-\frac{1}{8}$$

(ii) $1\leqq a$ のとき



$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，$x=-1$ のとき最大値 $1+2a+8b$，$x=1$ のとき最小値 $1-2a+8b$ をとる。

$1+2a+8b=7$ より

$$a+4b=3 \quad \cdots\cdots③$$

$1-2a+8b=-7$ より

$a-4b=4$ ……④

③＋④ より

$2a=7 \quad \therefore \quad a=\dfrac{7}{2}$

これは $1 \leqq a$ を満たす。

③へ代入して

$\dfrac{7}{2}+4b=3$

$4b=-\dfrac{1}{2} \quad \therefore \quad b=-\dfrac{1}{8}$

(i)，(ii)より

$(a,\ b)=\left(-\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{1}{8}\right),\ \left(\dfrac{7}{2},\ -\dfrac{1}{8}\right)$ ……(答)

2 解答

(1) x^3 の係数は $a+b+c+d$，定数項は $abcd$ であるから

$a+b+c+d=2$ ……①

$abcd=3003$ ……②

$3003=3\times7\times11\times13$

であり，①，②より

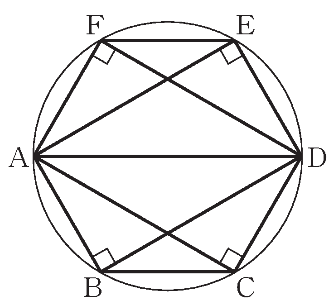
$a<b<0<c<d$

であるから

$(a,\ b,\ c,\ d)=(-21,\ -1,\ 11,\ 13),\ (-13,\ -3,\ 7,\ 11)$

……(答)

(2) 正六角形 ABCDEF の 6 個の頂点から異なる 3 点を選んでできる三角形は全部で



${}_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$ 通り

このうち直角三角形は 1 つの直径に対して 4 個あり，直径は AD，BE，CF があるから

$4\times3=12$ 通り

ある。

よって，直角三角形とならない頂点の選び方は

$20-12=8$ 通り　……(答)

(3)　$221=13\times17$ だから，13 と 17 の倍数以外の自然数は 221 と互いに素となる。

13 の倍数は 13×1，13×2，13×3，…，13×17 の 17 個

17 の倍数は 17×1，17×2，17×3，…，17×13 の 13 個

この中で 221 は重複しているので，221 と互いに素である自然数は

$221-(17+13-1)=192$ 個　……(答)

3 解答

(1)　$(x,\ y,\ z)$ は全部で $6\times6\times6=216$ 通りである。

積 xyz が奇数となるのは x，y，z がすべて奇数のときだから

$3\times3\times3=27$ 通り

よって，積 xyz が偶数となる $(x,\ y,\ z)$ は

$216-27=189$ 通り　……(答)

(2)　$x+y+z$ が奇数となるのは x，y，z について

(i) 1 つが奇数，2 つが偶数

(ii) 3 つとも奇数

のいずれかであるから

$3\times(3\times3\times3)+3\times3\times3=81+27=108$ 通り　……(答)

(3)　$xy+yz+zx$ が奇数となるのは xy，yz，zx について

(i) 1 つが奇数，2 つが偶数

(ii) 3 つとも奇数

のいずれかである。

(i)について，xy が奇数，yz，zx が偶数のときは

$(3\times3)\times3=27$ 通り

であり，他の場合も同様であるから

$27\times3=81$ 通り

(ii)については，$(3\times3)\times3=27$ 通りである。

よって，$xy+yz+zx$ が奇数となる $(x,\ y,\ z)$ は

$81+27=108$ 通り　……(答)

4 解答

(1)　$y=6x^2$ より

$$y'=12x$$

$x=p$ のとき

$$y'=12p$$

l の方程式は

$$y-6p^2=12p(x-p)$$

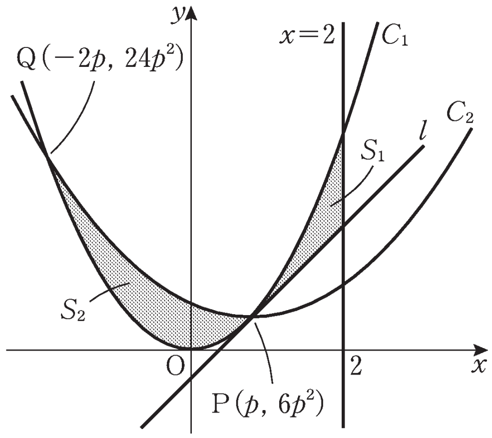
$$y=12px-6p^2 \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)　$$S_1=\int_p^2(6x^2-12px+6p^2)dx$$

$$=\left[2x^3-6px^2+6p^2x\right]_p^2$$

$$=16-24p+12p^2-(2p^3-6p^3+6p^3)$$

$$=-2p^3+12p^2-24p+16 \quad \cdots\cdots(答)$$



C_2 の方程式は $y=a(x-p)^2+6p^2$ とおける。

点 $Q(-2p,\ 24p^2)$ を通るから

$$24p^2=9ap^2+6p^2$$

$$9ap^2=18p^2$$

$$a=2$$

よって

$$y=2(x-p)^2+6p^2=2x^2-4px+8p^2$$

$$S_2=\int_{-2p}^{p}(2x^2-4px+8p^2-6x^2)dx$$

$$=\int_{-2p}^{p}(-4x^2-4px+8p^2)dx$$

$$=-4\int_{-2p}^{p}(x+2p)(x-p)dx$$

$$=-4\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(p+2p)^3$$

$=\dfrac{2}{3}\cdot 27p^3=18p^3$ ……(答)

(3) $S=S_1+S_2$

$=-2p^3+12p^2-24p+16+18p^3$

$=16p^3+12p^2-24p+16$

$\dfrac{dS}{dp}=48p^2+24p-24$

$=24(2p^2+p-1)$

$=24(2p-1)(p+1)$

$\dfrac{dS}{dp}=0$ となる p の値は，$0<p<2$ より

$p=\dfrac{1}{2}$

増減表より，S を最小にする p の値は

$p=\dfrac{1}{2}$ ……(答)

S の最小値は

$2+3-12+16=9$ ……(答)

p	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2
$\frac{dS}{dp}$		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

5 解答

(1) $a_1>0$ であることと，与えられた漸化式より，帰納的に $a_n\neq 0$ $(n=1,$ $2,\ \cdots)$ が言えるから，両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{3}{2}(n+1)+\frac{1}{a_n}$$

これより

$b_{n+1}=b_n+\dfrac{3}{2}(n+1)$ ……(答)

(2) (1)より

$$b_{n+1}-b_n=\frac{3}{2}(n+1)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

であるから，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\left\{\frac{1}{2}(n-1)n+n-1\right\}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{4}(n-1)n+\frac{3}{2}n-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{3}{4}n(n-1+2)=\frac{3}{4}n(n+1)$$

$b_1=\frac{3}{2}$ はこれに含まれるので

$$b_n=\frac{3}{4}n(n+1) \quad (n\geqq 1)$$

よって

$$a_n=\frac{1}{b_n}=\frac{4}{3n(n+1)} \quad \cdots\cdots(答)$$

(3) $$\sum_{k=1}^{100}a_k=\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{4}{3}\sum_{k=1}^{100}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ \cdots\ +\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)\right\}$$

$$=\frac{4}{3}\left(1-\frac{1}{101}\right)$$

$$=\frac{4}{3}\cdot\frac{100}{101}=\frac{400}{303} \quad \cdots\cdots(答)$$