数学Ⅰ・数学A 追試験

問題番号(配点)	解答記号	正　解	配点	チェック
第１問 (30)	ア，イ	1，3	2	
	ウエ，オ	−1，4	2	
	カ，キ	7，3	3	
	クケ，コ	−8，4	3	
	$\frac{サ}{シ}$	$\frac{1}{4}$	2	
	ス	2	3	
	$\frac{セ}{ソ}$	$\frac{2}{3}$	3	
	タ，チ	1，3	3	
	$\frac{ツ}{テト}$，$\frac{ナ}{ニ}$	$\frac{9}{16}$，$\frac{5}{8}$	3	
	$\frac{ヌ}{ネ}$，$\frac{\sqrt{ノ}}{ハ}$	$\frac{5}{9}$，$\frac{\sqrt{5}}{3}$	3	
	ヒ，フ	②，⓪	3	

問題番号(配点)	解答記号	正　解	配点	チェック
第２問 (30)	アイウ	−14	3	
	エ，オ	3，1	1	
	カ，キクケコ	4，1480	2	
	サシス	185	3	
	セ，ソ	③，④ (解答の順序は問わない)	4 (各２)	
	タ	②	2	
	チ，ツ	⓪，③	2	
	テ，ト	①，②	2	
	ナ	②	2	
	ニ	③	2	
	ヌ	⓪	3	
	ネ	②	2	
	ノ	③	2	

問題番号(配点)	解答記号	正　解	配点	チェック
第 3 問 (20)	ア	1	1	
	イ	3	1	
	ウ	2	1	
	$\dfrac{エ}{オ}$	$\dfrac{3}{8}$	3	
	$\dfrac{カ}{キ}$	$\dfrac{1}{4}$	3	
	$\dfrac{ク}{ケ}$	$\dfrac{2}{3}$	2	
	コ	3	1	
	$\dfrac{サシ}{スセソ}$	$\dfrac{28}{729}$	2	
	$\dfrac{タチ}{ツテトナ}$	$\dfrac{32}{2187}$	3	
	$\dfrac{ニ}{ヌ}$	$\dfrac{3}{4}$	3	
第 4 問 (20)	アイ，ウエ	26，51	2	
	オ，カキ	6，−3	2	
	クケ，コサ	51，26	2	
	シ	4	2	
	ス	3	2	
	セ，ソ	7，4	3	
	タ，チ	0，2	3	
	ツテ，ト，ナニ	15，3，13	4	

問題番号(配点)	解答記号	正　解	配点	チェック
第 5 問 (20)	ア：イ	3：4	2	
	ウ	2	2	
	エ	7	3	
	オ	②	3	
	カキ：ク	15：8	2	
	ケコ：サ	20：3	2	
	$\dfrac{シス}{セ}$	$\dfrac{32}{9}$	3	
	ソ：タ	5：3	3	

（注）　第 1 問，第 2 問は必答。第 3 問〜第 5 問のうちから 2 問選択。計 4 問を解答。

自己採点欄
100 点

第 1 問 —— 数と式，図形と計量，２次関数

〔１〕 標準 《不等式》

(1) 不等式 $k-x<2x+1$ を解くと

$$3x>k-1 \qquad \therefore \quad x>\frac{k-\boxed{1}}{\boxed{3}} \quad \cdots\cdots③ \quad \rightarrow ア，イ$$

であり，不等式 $\sqrt{5}x<k-x$ を解くと

$$(\sqrt{5}+1)x<k$$

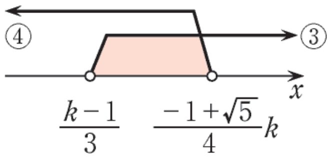
$\sqrt{5}+1>0$ なので

$$x<\frac{k}{\sqrt{5}+1}=\frac{k(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{k(\sqrt{5}-1)}{4}$$

すなわち $\quad x<\dfrac{\boxed{-1}+\sqrt{5}}{\boxed{4}}k \quad \cdots\cdots④ \quad \rightarrow$ ウエ，オ

これより，不等式①を満たす x が存在するための条件は，③，④より

$$\frac{k-1}{3}<\frac{-1+\sqrt{5}}{4}k$$



であるから，この式を解くと

$$4(k-1)<3(-1+\sqrt{5})k \qquad (7-3\sqrt{5})k<4$$

$7-3\sqrt{5}=\sqrt{49}-\sqrt{45}>0$ なので

$$k<\frac{4}{7-3\sqrt{5}}=\frac{4(7+3\sqrt{5})}{(7-3\sqrt{5})(7+3\sqrt{5})}=\frac{4(7+3\sqrt{5})}{4}=7+3\sqrt{5}$$

よって，不等式①を満たす x が存在するような k の値の範囲は

$$k<\boxed{7}+\boxed{3}\sqrt{5} \quad \cdots\cdots② \quad \rightarrow カ，キ$$

(2) $k<7+3\sqrt{5}$ ……② が成り立つとき，不等式①を満たす x の値の範囲は，③，④より

$$\frac{k-1}{3}<x<\frac{-1+\sqrt{5}}{4}k \quad \cdots\cdots(*)$$

なので，その範囲の幅は

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}k-\frac{k-1}{3} \quad \cdots\cdots(**)$$

これより，不等式①を満たす x の値の範囲の幅が $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ より大きくなるための条件は

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}k-\frac{k-1}{3}>\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \cdots\cdots(***)$$

であるから，これを解くと

$$3(-1+\sqrt{5})k-4(k-1)>4\sqrt{5} \qquad (-7+3\sqrt{5})k>4(\sqrt{5}-1)$$

$-7+3\sqrt{5}=-\sqrt{49}+\sqrt{45}<0$ なので

$$k<\frac{4(\sqrt{5}-1)}{-7+3\sqrt{5}}=\frac{4(\sqrt{5}-1)(3\sqrt{5}+7)}{(3\sqrt{5}-7)(3\sqrt{5}+7)}=\frac{4(8+4\sqrt{5})}{-4}=-(8+4\sqrt{5})$$

よって，不等式①を満たす x の値の範囲の幅が $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ より大きくなるような k の値の範囲は

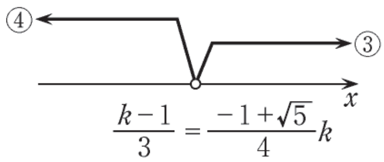
$$k<\boxed{-8}-\boxed{4}\sqrt{5} \quad \to クケ，コ$$

解 説

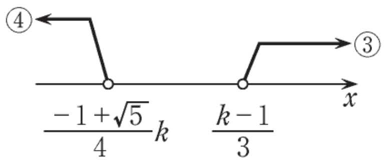
(1)　不等式①を満たす x が存在するための条件は，③と④の共通部分が存在することであるから，求める条件は $\dfrac{k-1}{3}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}k$ となる。

$\dfrac{k-1}{3}\geqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}k$ のときには③と④の共通部分は存在しない。

• $\dfrac{k-1}{3}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}k$ のとき



• $\dfrac{k-1}{3}>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}k$ のとき



(2)「x の値の範囲の幅」をどのように定義するかは問題文で与えられているので，その定義に基づいて考えていけばよい。そうすると，不等式①を満たす x の値の範囲が，③，④から(＊)となることと，(＊)の範囲の幅が(＊＊)となることがわかるので，あとは不等式(＊＊＊)を解けば k の値の範囲が求まる。

〔2〕 標準 《正弦定理，三角形の面積，余弦定理，２次関数の最大》

(1)　$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ であるとき，$\sin^2\angle ABC+\cos^2\angle ABC=1$ より

$$\cos\angle ABC=\pm\sqrt{1-\sin^2\angle ABC}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2}=\pm\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} \quad \to \frac{サ}{シ}$$

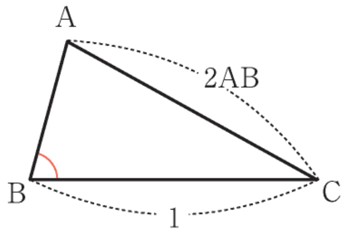
(2)(i)　$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\sin\angle ACB=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ のとき，△ABC に正弦定理を用いれば

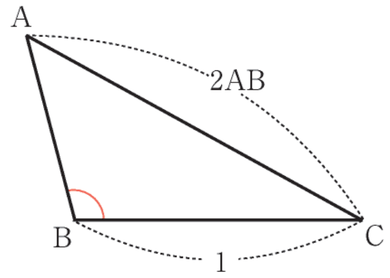
$$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{AB}{\sin\angle ACB} \qquad AC\cdot\sin\angle ACB=AB\cdot\sin\angle ABC$$

$$AC\cdot\frac{\sqrt{15}}{8}=AB\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} \qquad \therefore\ AC=\boxed{2}AB \quad \to ス$$

(ii)　$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ であるとき，(1)より，$\cos\angle ABC=\dfrac{1}{4}$ または $\cos\angle ABC=-\dfrac{1}{4}$ なので，条件を満たす三角形は，次の二つである。

(ア)　$\cos\angle ABC=\dfrac{1}{4}$ のとき　　　(イ)　$\cos\angle ABC=-\dfrac{1}{4}$ のとき





△ABC の面積は，(ア)，(イ)のどちらの場合も

$$(\triangle ABC\text{ の面積})=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{8}AB$$

となるので，AB の長さが長い方が△ABC の面積は大きくなる。

(ア)　$\cos\angle ABC=\dfrac{1}{4}$ のとき

△ABC に余弦定理を用いて

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$$

$$(2AB)^2=AB^2+1^2-2\cdot AB\cdot 1\cdot\frac{1}{4}$$

$$6AB^2+AB-2=0 \qquad (2AB-1)(3AB+2)=0$$

$AB>0$ なので　　$AB=\dfrac{1}{2}$

(イ)　$\cos\angle ABC=-\dfrac{1}{4}$ のとき

△ABC に余弦定理を用いて

$$(2AB)^2=AB^2+1^2-2\cdot AB\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$6AB^2-AB-2=0 \qquad (2AB+1)(3AB-2)=0$$

$AB>0$ なので　　$AB=\dfrac{2}{3}$

よって，(ア)，(イ)より，AB の長さが長いのは，(イ) $\cos\angle ABC=-\dfrac{1}{4}$ のときの $AB=\dfrac{2}{3}$ であるから，面積が大きい方の△ABC においては

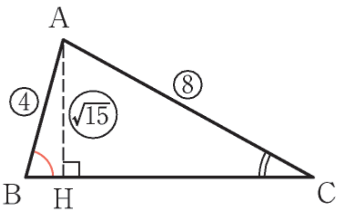
$$AB=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}}\ \rightarrow\frac{セ}{ソ}$$

別解　(2)(ⅰ)(ⅱ)　$\sin\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，$\sin\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ であるので，(1)より

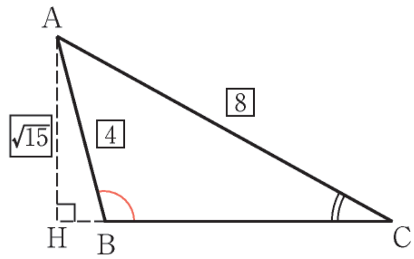
$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{1}{4}\quad\text{または}\quad\cos\angle\mathrm{ABC}=-\frac{1}{4}$$

であることも合わせて考慮すれば，点Aから直線BCに下ろした垂線の足をHとすると，条件を満たす三角形は，次の二つである。

(ア)　$\cos\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{4}$ のとき



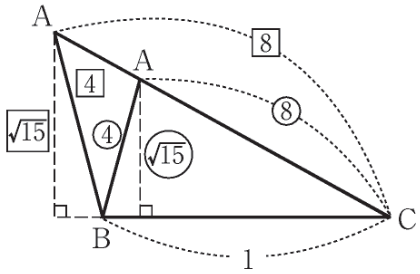
(イ)　$\cos\angle\mathrm{ABC}=-\dfrac{1}{4}$ のとき



このとき，AB：AC＝4：8＝1：2 なので

$$\mathrm{AC}=2\mathrm{AB}$$

また，BC＝1 であることに注意すれば，(ア)と(イ)は右のようになるから，(ア)と(イ)の中で面積が大きい方の△ABC は，(イ) $\cos\angle\mathrm{ABC}=-\dfrac{1}{4}$ のときである。



（以下，〔解答〕(2)(ⅱ)(イ)に同じ）

(3)　△ABC に正弦定理を用いれば

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=\frac{\mathrm{AB}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}\qquad \mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{ACB}=\mathrm{AB}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}$$

$\sin\angle\mathrm{ABC}=2\sin\angle\mathrm{ACB}$ より

$$\mathrm{AC}\cdot\sin\angle\mathrm{ACB}=\mathrm{AB}\cdot 2\sin\angle\mathrm{ACB}$$

$0°<\angle\mathrm{ACB}<180°$ より，$\sin\angle\mathrm{ACB}>0$ なので，両辺を $\sin\angle\mathrm{ACB}$（$\neq 0$）で割って

$$\mathrm{AC}=2\mathrm{AB}$$

これより，△ABC に余弦定理を用いれば，BC＝1 により

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{\mathrm{AB}^2+1^2-(2\mathrm{AB})^2}{2\mathrm{AB}\cdot 1}$$

$$=\frac{\boxed{1}-\boxed{3}\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{AB}}\quad\cdots\cdots①\quad\rightarrow\text{タ，チ}$$

△ABC の面積 S について調べるために，S^2 を考えて

$$S^2=\left(\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\mathrm{AB}^2\cdot\mathrm{BC}^2\cdot\sin^2\angle\mathrm{ABC}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot AB^2\cdot 1^2\cdot(1-\cos^2\angle ABC)=\frac{1}{4}AB^2\left\{1-\left(\frac{1-3AB^2}{2AB}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{4}AB^2\left(1-\frac{1-6AB^2+9AB^4}{4AB^2}\right)=\frac{1}{4}AB^2\cdot\frac{4AB^2-(1-6AB^2+9AB^4)}{4AB^2}$$

$$=\frac{1}{16}(-9AB^4+10AB^2-1)$$

$AB^2=x$ とおくと

$$S^2=\frac{1}{16}(-9x^2+10x-1)=-\frac{\boxed{9}}{\boxed{16}}x^2+\frac{\boxed{5}}{\boxed{8}}x-\frac{1}{16}\quad\rightarrow\frac{ツ}{テト},\ \frac{ナ}{ニ}$$

と表すことができる。したがって

$$S^2=-\frac{9}{16}\left(x^2-\frac{10}{9}x\right)-\frac{1}{16}=-\frac{9}{16}\left\{\left(x-\frac{5}{9}\right)^2-\frac{25}{81}\right\}-\frac{1}{16}=-\frac{9}{16}\left(x-\frac{5}{9}\right)^2+\frac{1}{9}$$

ここで，x（$=AB^2$）のとり得る値の範囲を考えると，三角形の成立条件より

$$|AC-AB|<BC<AC+AB$$

が成り立つ。$AC=2AB$，$BC=1$ なので

$$|2AB-AB|<1<2AB+AB$$

$$AB<1<3AB\quad(\because\quad AB>0)$$

$$AB<1\quad かつ\quad 1<3AB$$

すなわち　$\frac{1}{3}<AB<1$

これより　$\frac{1}{9}<AB^2<1$　　$\therefore\ \frac{1}{9}<x<1$

なので，S^2 が最大となるのは，$x=\frac{\boxed{5}}{\boxed{9}}\rightarrow\frac{ヌ}{ネ}$ のときだから，$AB>0$ より

$$AB=\sqrt{x}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

すなわち，$AB=\frac{\sqrt{\boxed{5}}}{\boxed{3}}\rightarrow\frac{\sqrt{ノ}}{ハ}$ のときである。

$S>0$ より，このときに面積 S も最大となる。

また，面積 S が最大となる△ABC において，$AB=\frac{\sqrt{5}}{3}$ を①に代入すると

$$\cos\angle ABC=\frac{1-3\cdot\frac{5}{9}}{2\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}<0$$

なので，∠ABC は**鈍角** $\boxed{②}$ →**ヒ** で，△ABC の残りの 2 角 ∠ACB，∠CAB は鋭角となるから，∠ACB は**鋭角** $\boxed{⓪}$ →**フ** である。

解説

(2)(i) 正弦の値から辺の関係式を求めたいので，正弦定理を用いる。

(ii) $\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{15}}{4}$ であるとき，(1)より，$\cos\angle ABC=\frac{1}{4}$ または $\cos\angle ABC=-\frac{1}{4}$ なので，$\cos\angle ABC=\frac{1}{4}>0$ のとき $\angle ABC$ は鋭角，$\cos\angle ABC=-\frac{1}{4}<0$ のとき $\angle ABC$ は鈍角であることがわかる。

〔別解〕では，条件 $\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos\angle ABC=\frac{1}{4}$ または $\cos\angle ABC=-\frac{1}{4}$ について三角比の定義から考えることにより，条件を満たす三角形を(ア)と(イ)の二つの場合に絞り込んだ。さらに，$BC=1$ に注目することで，面積が大きい方の $\triangle ABC$ は(イ) $\cos\angle ABC=-\frac{1}{4}$ のときであることがわかるので，$\triangle ABC$ に余弦定理を用いることで AB の長さが求まる。

(3) 問題文で「$\cos\angle ABC=\frac{\boxed{タ}-\boxed{チ}AB^2}{2AB}$」となっているので，$\triangle ABC$ に余弦定理を用いることを考えれば，$BC=1$ により

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{AB^2+1-AC^2}{2AB}$$

となるから，AC を AB で表せばよいことがわかる。その際には，$\sin\angle ABC=2\sin\angle ACB$ を利用して(2)と同様に考えることになる。

$\triangle ABC$ の面積 S について調べるために，S^2 を考えると，$\sin^2\angle ABC$ が得られるので，$\sin^2\angle ABC=1-\cos^2\angle ABC$ と①を用いて S^2 を変形することで，AB^2 で表すことができる。

$x=AB^2$ のとり得る値の範囲を考えるために，三角形の成立条件を利用する。

ポイント **三角形の成立条件**

三角形の 2 辺の長さの和は，残りの 1 辺の長さより大きい。すなわち

$$BC+CA>AB,\ CA+AB>BC,\ AB+BC>CA$$
$$\Longleftrightarrow |CA-AB|<BC<CA+AB$$

面積 S が最大となる $\triangle ABC$ において，$AB=\frac{\sqrt{5}}{3}$ を①に代入すると，$\cos\angle ABC<0$ となるので，$\angle ABC>90°$ であることがわかる。$\triangle ABC$ の 3 つの内角の和は $180°$ だから，残りの 2 つの角 $\angle ACB$，$\angle CAB$ は，$\angle ACB<90°$，$\angle CAB<90°$ となる。

第2問 ── 2次関数，データの分析

〔1〕 やや難 《2次関数》

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ ……① のグラフは，3 点 (100, 1250)，(200, 450)，(300, 50) を通るので，それぞれ①に代入して

$$\begin{cases} 1250=10000a+100b+c & \cdots\cdots ㋐ \\ 450=40000a+200b+c & \cdots\cdots ㋑ \\ 50=90000a+300b+c & \cdots\cdots ㋒ \end{cases}$$

㋐－㋑ より

$$800=-30000a-100b \qquad \therefore \quad 300a+b=-8 \quad \cdots\cdots ㋓$$

㋑－㋒ より

$$400=-50000a-100b \qquad \therefore \quad 500a+b=-4 \quad \cdots\cdots ㋔$$

㋔－㋓ より

$$200a=4 \qquad \therefore \quad a=\frac{1}{50}$$

このとき，$a=\frac{1}{50}$ を㋓に代入すれば

$$b=-300a-8=-300\cdot\frac{1}{50}-8=\boxed{-14} \quad \rightarrow \text{アイウ}$$

$a=\frac{1}{50}$，$b=-14$ を㋐に代入して

$$c=-10000a-100b+1250=-10000\cdot\frac{1}{50}-100\cdot(-14)+1250=2450$$

よって，①は　$y=\frac{1}{50}x^2-14x+2450$

1 皿あたりの価格 x と売り上げ数 y の関係が①を満たしたときの，$100 \leqq x \leqq 300$ での利益の最大値 M について考える。

1 皿あたりの材料費は 80 円であり，材料費以外にかかる費用は 5000 円である。よって，$x-80$ と売り上げ数の積から，5000 を引いたものが利益となるので

$$(\text{利益})=(x-80)\times(\text{売り上げ数})-5000=(x-80)\times y-5000$$

このとき，売り上げ数を①の右辺の 2 次式としたときの利益を $z_0(x)$ とすると

$$z_0(x)=(x-80)\times\left(\frac{1}{50}x^2-14x+2450\right)-5000$$

なので，展開した式を考えれば，利益は x の $\boxed{3}$ 次式 →**エ** となる。

一方で，売り上げ数として①の右辺の代わりに x の $\boxed{1}$ 次式 →**オ** を使えば，利益は x の 2 次式となる。

1 次関数 $y = -4x + 1160$　……②を考える。
売り上げ数を②の右辺としたときの利益 z は

$$z = (x-80) \times (-4x+1160) - 5000$$
$$= -\boxed{4}x^2 + \boxed{1480}x - 97800$$ →カ，キクケコ

で与えられる。
z が最大となる x を p とおくと

$$z = -4x^2 + 1480x - 97800 = -4(x^2 - 370x) - 97800$$
$$= -4\{(x-185)^2 - 185^2\} - 97800 = -4(x-185)^2 + 39100$$

なので，$p = \boxed{185}$ → **サシス** であり，z の最大値は 39100 である。
1 次関数 $y = -8x + 1968$　……③ を考える。
売り上げ数を③の右辺としたときの利益を $z_1(x)$ とすると

$$z_1(x) = (x-80) \times (-8x+1968) - 5000$$

であり，利益 $z_1(x)$ は $x = 163$ のときに最大となり，最大値は $z_1(163) = 50112$ となる。
図 3 より，③のグラフは①のグラフより下の方にあるので，売り上げ数を少なく見積もることになるから，③は各 x について値が①より小さい。
したがって，$100 \leqq x \leqq 300$ を満たすすべての x の値に対して

$$\frac{1}{50}x^2 - 14x + 2450 > -8x + 1968$$

が成り立つ。
$100 \leqq x \leqq 300$ のとき，$x - 80 > 0$ なので，両辺に $x - 80$ をかけて，5000 を引くと

$$(x-80)\left(\frac{1}{50}x^2 - 14x + 2450\right) - 5000 > (x-80)(-8x+1968) - 5000$$

すなわち $z_0(x) > z_1(x)$ となるので，$x = 163$ を代入すると

$$z_0(163) > z_1(163) = 50112 \quad \cdots\cdots⑤$$

よって，$x = 163$ とすれば，売り上げ数を①の右辺としたときの利益は少なくとも 50112 以上となるから，**③**は正しい。
同様に，図 3 より，②のグラフは①のグラフより下の方にあるので，売り上げ数を少なく見積もることになるから，②は各 x について値が①より小さい。
したがって，$100 \leqq x \leqq 300$ を満たすすべての x の値に対して

$$\frac{1}{50}x^2 - 14x + 2450 > -4x + 1160$$

が成り立つ。
$100 \leqq x \leqq 300$ のとき，$x - 80 > 0$ なので，両辺に $x - 80$ をかけて，5000 を引くと

$$(x-80)\left(\frac{1}{50}x^2 - 14x + 2450\right) - 5000 > (x-80)(-4x+1160) - 5000$$

より，売り上げ数を②の右辺としたときの利益 z を $z(x)$ とおくと $z_0(x) > z(x)$ と

なるので，$x=p$（$=185$）を代入すると

$$z_0(p)>z(p)=39100 \quad \cdots\cdots ⑥$$

よって，$x=p$とすれば，売り上げ数を①の右辺としたときの利益は少なくとも 39100 以上となるから，④は正しい。

また，利益の最大値 M は，売り上げ数を①の右辺としたときの利益の最大値だから，$100 \leqq x \leqq 300$ を満たすすべての x の値に対して

$$M \geqq z_0(x) \quad \cdots\cdots ⑦$$

が成り立つので，⑦に $x=p$（$=185$）を代入して，⑥を用いれば

$$M \geqq z_0(p)>39100 \quad \text{すなわち} \quad M>39100 \quad \cdots\cdots ⑧$$

よって，M は 39100 より大きいから，⓪は正しくない。

同様に，⑦に $x=163$ を代入して，⑤を用いれば

$$M \geqq z_0(163)>50112 \quad \text{すなわち} \quad M>50112 \quad \cdots\cdots ⑨$$

よって，M は 50112 より大きいから，①は正しくない。

さらに，⑧＋⑨ より

$$2M>39100+50112 \qquad \therefore \quad M>\frac{39100+50112}{2}$$

よって，M は $\dfrac{39100+50112}{2}$ より大きいから，②は正しくない。

また，⑦の右辺は 3 次式となるので，⑦の等号を成り立たせる x の値は求められない。

よって，$x=163$ あるいは $x=p$（$=185$）のときに，売り上げ数を①の右辺としたときの利益は最大値 M をとるかどうかわからないから，⑤と⑥は正しいとはいえない。

以上より，売り上げ数を①の右辺としたときの利益の記述として，正しいものは

$\boxed{③}$ と $\boxed{④}$ である。 →セ，ソ

1 次関数 $y=-6x+1860 \quad \cdots\cdots ④$ を考える。

$100 \leqq x \leqq 300$ において，売り上げ数を④の右辺としたときの利益を $z_2(x)$ とすると

$$z_2(x)=(x-80)\times(-6x+1860)-5000$$

であり，利益 $z_2(x)$ は $x=195$ のときに最大となり，最大値は $z_2(195)=74350$ となる。

図 4 より，④のグラフは①のグラフより上の方にあるので，売り上げ数を多く見積もることになるから，④は各 x について値が①より大きい。

したがって，$100 \leqq x \leqq 300$ を満たすすべての x の値に対して

$$\frac{1}{50}x^2-14x+2450<-6x+1860 \quad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つ。

$100 \leqq x \leqq 300$ のとき，$x-80>0$ なので，両辺に $x-80$ をかけて，5000 を引くと

$$(x-80)\left(\frac{1}{50}x^2-14x+2450\right)-5000<(x-80)(-6x+1860)-5000$$

すなわち　　$z_0(x)<z_2(x)$

また，$100 \leqq x \leqq 300$ において，利益 $z_2(x)$ の最大値は 74350 となるから

$$z_2(x) \leqq 74350$$

よって，$100 \leqq x \leqq 300$ を満たすすべての x の値に対して

$$z_0(x)<z_2(x) \leqq 74350 \quad \text{すなわち} \quad z_0(x)<74350 \quad \cdots\cdots(**)$$

が成り立つので，売り上げ数を①の右辺としたときの利益の最大値 M は 74350 より小さい。また，⑨より，M は 50112 より大きい。よって，M は 50112 より大きく 74350 より小さい。

以上より，売り上げ数を①の右辺としたときの利益の最大値 M についての記述として，正しいものは $\boxed{②}$ である。 →タ

解説

(利益)$=(x-80)\times y-5000$ の売り上げ数 y を①の右辺の 2 次式とすると，(利益)$=(x-80)\times\left(\frac{1}{50}x^2-14x+2450\right)-5000$ となるので，実際に展開すれば，(利益)$=\frac{1}{50}x^3-\frac{78}{5}x^2+3570x-201000$ となって，利益は x の 3 次式となる。一方で，売り上げ数 y として①の右辺の代わりに，①の右辺よりも次数が 1 低い 1 次式を用いれば，(利益) の次数も 1 低い x の 2 次式となることが想像できる。実際に，x の 1 次式 $y=dx+e$ ($d \neq 0$) を使えば，(利益)$=(x-80)\times(dx+e)-5000=dx^2-(80d-e)x-(80e+5000)$ ($d \neq 0$) となるので，利益は x の 2 次式となる。

売り上げ数を①の右辺としたときの利益の記述として，選択肢⓪～⑥のうちから正しいものを選ぶ設問 $\boxed{セ}$ と $\boxed{ソ}$ は，解答方針が立てづらいが，図 2 の前の会話文中「太郎：少なく見積もるということは，その関数のグラフは①のグラフより，下の方にあるということだね」，図 2 の後の問題文中「①の右辺の代わりに②の右辺を使うと，売り上げ数を少なく見積もることになる」，図 3 の前の会話文中「太郎：売り上げ数を少なく見積もった式は，各 x について値が①より小さければよいので」などを手掛かりにして考えていく。図 3 より，②のグラフと③のグラフが，①のグラフより下の方にあることがわかるから，売り上げ数を少なく見積もることになり，②と③はそれぞれ，各 x についての値が①より小さくなるので，$100 \leqq x \leqq 300$ を満たすすべての x の値に対して，$\frac{1}{50}x^2-14x+2450>-4x+1160$，$\frac{1}{50}x^2-14x+2450>-8x+1968$ が成り立つ。

図 4 において，$x=100$，300 のとき①のグラフと④のグラフが交わっているように見えるが，実際には交わっておらず，$x=100$，300 のときも $(*)$ が成り立つ。$x=100$ のとき，①の売り上げ数 y は最初の表より 1250 であり，④の売り上げ数 y は $y=-6\cdot 100+1860=1260$ であるので，$(*)$ が成り立つ。$x=300$ のとき，①の売り上

げ数 y は最初の表より 50 であり，④の売り上げ数 y は $y=-6\cdot300+1860=60$ であるので，(＊)が成り立つ。

売り上げ数を①の右辺としたときの利益 $z_0(x)=(x-80)\left(\frac{1}{50}x^2-14x+2450\right)-5000$ が $x=\alpha$ において最大値 M をとるとすると，$100\leqq x\leqq300$ を満たすすべての x の値に対して，(＊＊)が成り立つので，(＊＊)に $x=\alpha$ を代入すると，$M=z_0(\alpha)<74350$，すなわち，$M<74350$ となる。

〔2〕 標準 《平均値，分散》

(1)　賛成ならば 1，反対ならば 0 と表すので，データの値の総和 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ は，賛成の人の数だけ 1 を足した数になるから，**賛成の人の数** $\boxed{⓪}$ →チ と一致し，

平均値 $\overline{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ は

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{(\text{賛成の人の数})}{n}$$

となるから，**n 人中における賛成の人の割合** $\boxed{③}$ →ツ と一致する。

(2)　0 と 1 だけからなるデータの平均値と分散について考える。

$m=x_1+x_2+\cdots+x_n$ とおくと，平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\frac{m}{n}=\frac{(1\text{ の個数})}{n}$$

また，分散を s^2 で表すと

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\left(x_1-\frac{m}{n}\right)^2+\left(x_2-\frac{m}{n}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\frac{m}{n}\right)^2\right\}$$

ここで，0 と 1 の個数に着目すると，$m=x_1+x_2+\cdots+x_n$ は 1 の個数と一致するから，x_1，x_2，…，x_n の中で，1 であるものの個数は m 個，0 であるものの個数は $(n-m)$ 個であるので

$$s^2=\frac{1}{n}\left\{m\left(1-\frac{m}{n}\right)^2+(n-m)\left(0-\frac{m}{n}\right)^2\right\}$$ $\boxed{①}$ →テ，$\boxed{②}$ →ト

$$=\frac{1}{n}\left\{m\left(1-2\cdot\frac{m}{n}+\frac{m^2}{n^2}\right)+(n-m)\cdot\frac{m^2}{n^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\left(m-2\cdot\frac{m^2}{n}+\frac{m^3}{n^2}\right)+\left(\frac{m^2}{n}-\frac{m^3}{n^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\left(m-\frac{m^2}{n}\right)=\frac{1}{n}\cdot\frac{mn-m^2}{n}=\frac{m(n-m)}{n^2}$$ $\boxed{②}$ →ナ

解説

(1)　n 人分のデータを 0 と 1 だけで表していることがポイントとなる。n 人分のデータ x_1，x_2，…，x_n はそれぞれ，0 または 1 で表されるから，データの値の総和 $x_1+x_2+\cdots+x_n$ は 1 の個数と一致する。

(2)　0 と 1 だけからなるデータを考えるので，$m=x_1+x_2+\cdots+x_n=$(1の個数）となるから，x_1，x_2，…，x_n のうち，1 であるものが m 個，0 であるものが（$n-m$）個であることに着目すると

$$s^2=\frac{1}{n}\left\{\left(x_1-\frac{m}{n}\right)^2+\left(x_2-\frac{m}{n}\right)^2+\cdots+\left(x_n-\frac{m}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\underbrace{\left(1-\frac{m}{n}\right)^2+\cdots+\left(1-\frac{m}{n}\right)^2}_{m\text{ 個}}+\underbrace{\left(0-\frac{m}{n}\right)^2+\cdots+\left(0-\frac{m}{n}\right)^2}_{(n-m)\text{ 個}}\right\}$$
$$=\frac{1}{n}\left\{m\times\left(1-\frac{m}{n}\right)^2+(n-m)\times\left(0-\frac{m}{n}\right)^2\right\}$$

となる。

〔3〕 易 《平均値，共分散，標準偏差，相関係数》

W' の x の平均値 $\overline{x}$ は

$$\overline{x}=\frac{1}{5}\{(-1)+(-1)+1+1+5a\}=a \quad \boxed{③} \quad \to\text{ニ}$$

W' の y の平均値 $\overline{y}$ は

$$\overline{y}=\frac{1}{5}\{(-1)+1+(-1)+1+5a\}=a$$

表 1 の計算表は以下のようになる。

表 1　計算表

x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
-1	-1	$-1-a$	$-1-a$	$(a+1)^2=a^2+2a+1$
-1	1	$-1-a$	$1-a$	$(a+1)(a-1)=a^2-1$
1	-1	$1-a$	$-1-a$	$(a-1)(a+1)=a^2-1$
1	1	$1-a$	$1-a$	$(a-1)^2=a^2-2a+1$
$5a$	$5a$	$4a$	$4a$	$(4a)^2=16a^2$

これより，W' の x と y の共分散 s_{xy} は

$$s_{xy}=\frac{1}{5}\{(a+1)^2+(a+1)(a-1)+(a-1)(a+1)+(a-1)^2+(4a)^2\}$$

$$=\frac{20a^2}{5}=4a^2 \quad \boxed{⓪} \quad \to ヌ$$

W' の x と y の標準偏差を，それぞれ s_x，s_y とすると

$$s_x=\sqrt{\frac{1}{5}\{(-1-a)^2+(-1-a)^2+(1-a)^2+(1-a)^2+(4a)^2\}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{5}(20a^2+4)}$$

$$s_y=\sqrt{\frac{1}{5}\{(-1-a)^2+(1-a)^2+(-1-a)^2+(1-a)^2+(4a)^2\}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{5}(20a^2+4)}$$

積 s_xs_y は

$$s_xs_y=\sqrt{\frac{1}{5}(20a^2+4)}\sqrt{\frac{1}{5}(20a^2+4)}=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2(20a^2+4)^2}=\frac{1}{5}|20a^2+4|$$

$a^2\geqq 0$ より，$20a^2+4>0$ なので

$$s_xs_y=\frac{1}{5}(20a^2+4)=4a^2+\frac{4}{5} \quad \boxed{②} \quad \to ネ$$

また，相関係数が 0.95 以上となるための必要十分条件は

$$\frac{s_{xy}}{s_xs_y}\geqq 0.95$$

より

$$s_{xy}\geqq 0.95s_xs_y \quad (\because \quad s_x>0,\ s_y>0)$$

なので

$$4a^2\geqq\frac{95}{100}\left(4a^2+\frac{4}{5}\right) \qquad a^2\geqq\frac{19}{20}\left(a^2+\frac{1}{5}\right)$$

$$a^2-\frac{19}{5}\geqq 0 \qquad \left(a+\sqrt{\frac{19}{5}}\right)\left(a-\sqrt{\frac{19}{5}}\right)\geqq 0$$

$$\therefore \quad a\leqq -\sqrt{\frac{19}{5}},\ \sqrt{\frac{19}{5}}\leqq a$$

これより，相関係数が 0.95 以上となるような a の値の範囲は

$$a\leqq-\frac{\sqrt{95}}{5},\ \frac{\sqrt{95}}{5}\leqq a \quad \boxed{③} \quad \to ノ$$

解 説

誘導に従って解き進めていけば，問題となる部分は特に見当たらない。

ポイント **平均値，標準偏差，共分散，相関係数**

変量 x，y の値の組として，n 組のデータが $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，…，$(x_n,\ y_n)$ のように与えられているとする。

x，y の平均値をそれぞれ，$\overline{x}$，$\overline{y}$ とすると

$$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

$$\overline{y}=\frac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$

x，y の標準偏差をそれぞれ，s_x，s_y とすると

$$s_x=\sqrt{\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}}$$

$$s_y=\sqrt{\frac{1}{n}\{(y_1-\overline{y})^2+(y_2-\overline{y})^2+\cdots+(y_n-\overline{y})^2\}}$$

x と y の共分散を s_{xy} とすると

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}$$

x と y の相関係数を r とすると

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

第 3 問 標準 場合の数と確率 《場合の数，条件付き確率》

(1)(i) 硬貨を 3 回投げ終えたとき，条件（＊）を満たす点 P の移動の仕方のうち，点（3，3）に至る移動の仕方は，点 O (0，0) から点（2，2）まで移動したのち，硬貨の表が出て，点（3，3）に移動する場合である。

点（2，2）に至る移動の仕方は 1 通り，硬貨の表が出るのは 1 通りだから，点（3，3）に至る移動の仕方は

$1\times1=\boxed{1}$ 通り →ア

点（3，1）に至る移動の仕方は

(ア) 点 O (0，0) から点（2，2）まで移動したのち，硬貨の裏が出て，点 (3，1) に移動する。

(イ) 点 O (0，0) から点（2，0）まで移動したのち，硬貨の表が出て，点（3，1）に移動する。

のいずれかである。

(ア) 点（2，2）に至る移動の仕方は 1 通り，硬貨の裏が出るのは 1 通りだから，このときの移動の仕方は

$1\times1=1$ 通り

(イ) 点（2，0）に至る移動の仕方は 2 通り，硬貨の表が出るのは 1 通りだから，このときの移動の仕方は

$2\times1=2$ 通り

(ア)・(イ)より，点（3，1）に至る移動の仕方は

$1+2=\boxed{3}$ 通り →イ

点（3，-1）に至る移動の仕方は，点 O (0，0) から点（2，0）まで移動したのち，硬貨の裏が出て，点（3，-1）に移動する場合である。

点（2，0）に至る移動の仕方は 2 通り，硬貨の裏が出るのは 1 通りだから，点（3，-1）に至る移動の仕方は

$2\times1=\boxed{2}$ 通り →ウ

よって，点 P の移動の仕方が条件(＊)を満たすような硬貨の表裏の出方の総数は $1+3+2$ である。

したがって，点 P の移動の仕方が条件(＊)を満たす確率は

$$\frac{1+3+2}{2^3}$$

として求めることができる。

(ii) 硬貨を 4 回投げるとき，(i)と同様に図を用いて考える。

条件 $y_1\geqq0$ かつ $y_2\geqq0$ かつ $y_3\geqq0$ かつ $y_4\geqq0$ ……(＊2) を満たす点 P の移動の仕

方は図3のようになる。
よって，点Pの移動の仕方が条件(＊2)を満たすような硬貨の表裏の出方の総数は

$$1+3+2=6 \quad \cdots\cdots①$$

したがって，点Pの移動の仕方が条件(＊2)を満たす確率は

$$\frac{6}{2^4}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{8}} \quad \cdots\cdots② \quad \to \frac{エ}{オ}$$

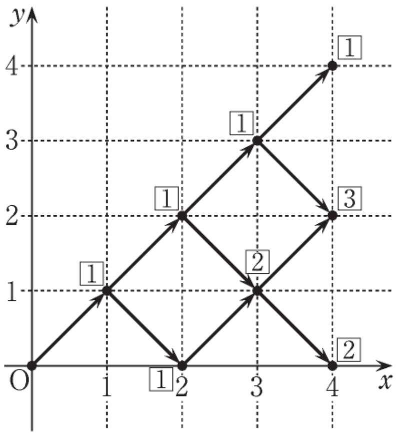


図 3

また，条件 $y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3=1$ かつ $y_4 \geqq 0$ ……(＊3) を満たす点Pの移動の仕方は図4のようになる。
よって，点Pの移動の仕方が条件(＊3)を満たすような硬貨の表裏の出方の総数は

$$2+2=4 \quad \cdots\cdots③$$

したがって，点Pの移動の仕方が条件(＊3)を満たす確率は

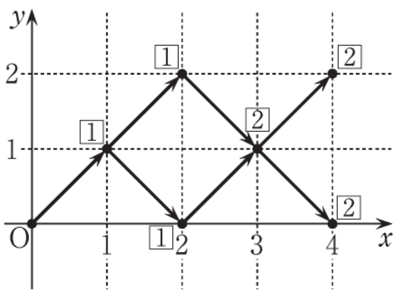


図 4

$$\frac{4}{2^4}=\frac{\boxed{1}}{\boxed{4}} \quad \cdots\cdots④ \quad \to \frac{カ}{キ}$$

さらに，$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3 \geqq 0$ かつ $y_4 \geqq 0$ である事象を W，$y_3=1$ である事象を X とすると，②より

$$P(W)=\frac{3}{8}$$

であり，$W \cap X$ は $y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3=1$ かつ $y_4 \geqq 0$ である事象だから，④より

$$P(W \cap X)=\frac{1}{4}$$

したがって，$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3 \geqq 0$ かつ $y_4 \geqq 0$ であったとき，$y_3=1$ である条件付き確率 $P_W(X)$ は

$$P_W(X)=\frac{P(W \cap X)}{P(W)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}}=\frac{\boxed{2}}{\boxed{3}} \quad \to \frac{ク}{ケ}$$

(iii) 硬貨を4回投げ終えた時点で表が出た回数を s 回とおくと，裏が出た回数は $(4-s)$ 回なので，点Pの座標が $(4,\ 2)$ であるとき，$y_4=2$ より

$$1 \cdot s+(-1) \cdot (4-s)=2 \qquad \therefore \quad s=3$$

よって，点 $(4,\ 2)$ に至る移動の仕方によらず表の出る回数は $\boxed{3}$ 回 →コ とな

り，裏の出る回数は $4-3=1$ 回となる。

(2)(i)　さいころを7回投げ終えた時点で3の倍数の目が出た回数を t 回とおくと，それ以外の目が出た回数は $(7-t)$ 回なので，点Qの座標が3であるとき

$$1\cdot t+(-1)\cdot(7-t)=3 \qquad \therefore \quad t=5$$

ここで，1個のさいころを投げるとき，3の倍数の目は3，6，それ以外の目は1，2，4，5なので，3の倍数の目が出る確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，それ以外の目が出る確率は $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ となる。

よって，点Qの座標が3である確率は，3の倍数の目が5回，それ以外の目が $7-5=2$ 回出るので

$$ {}_7\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2={}_7\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2=21\cdot\frac{2^2}{3^7}=\frac{\boxed{28}}{\boxed{729}} \quad \to \frac{サシ}{スセソ}$$

(ii)　1個のさいころを繰り返し投げるとき，このさいころの目の出方に応じて，座標平面上を移動する点Rを考える。点Rは原点O$(0,\ 0)$ を出発点として，点Rの x 座標は，さいころを投げるごとに1だけ増加，点Rの y 座標は，さいころを投げるごとに，3の倍数の目が出たら1だけ増加し，それ以外の目が出たら1だけ減少するものとする。また，さいころを k 回投げ終えた時点での点Rの座標 $(x,\ y)$ を $(k,\ r_k)$ で表す。

点Qの座標と点Rの y 座標 r_k は一致するので，さいころを7回投げる間，点Qの座標がつねに0以上3以下であり，かつ7回投げ終えた時点で点Qの座標が3である確率を求めるためには，点Rの移動の仕方が条件 $0\leqq r_k\leqq 3$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ かつ $r_7=3$　……(＊4)を満たす確率を求めればよい。条件(＊4)を満たす点Rの移動の仕方は図5のようになる。

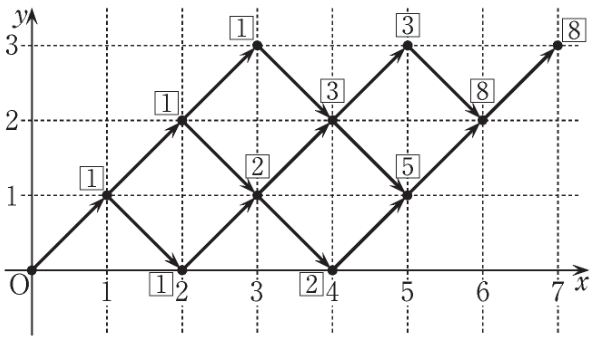


図　5

よって，点Rの移動の仕方が条件(＊4)を満たすようなさいころの目の出方の総数は8通りである。

(i)より，点Rの y 座標 r_k が $r_7=3$ であるのは，点 $(k,\ r_k)=(7,\ 3)$ に至る移動の仕方によらず，3の倍数の目が5回，それ以外の目が2回出るときであるので，8

通りのそれぞれの起こる確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ である。

したがって，さいころを 7 回投げる間，点 Q の座標がつねに 0 以上 3 以下であり，かつ 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 である確率は

$$8\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{\boxed{32}}{\boxed{2187}} \quad \cdots\cdots⑤ \quad \to\frac{タチ}{ツテトナ}$$

(iii) (ii)と同様に，点 R $(k,\ r_k)$ について考える。

点 Q の座標と点 R の y 座標 r_k は一致するので，さいころを 7 回投げる間，点 R $(k,\ r_k)$ が $0\leqq r_k\leqq 3$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ かつ $r_7=3$ である事象を Y，$r_3=1$ である事象を Z とすると，⑤より

$$P(Y)=\frac{32}{2187}$$

$Y\cap Z$ は，$0\leqq r_k\leqq 3$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ かつ $r_7=3$ かつ $r_3=1$ である事象で，条件 $0\leqq r_k\leqq 3$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ かつ $r_7=3$ かつ $r_3=1$ ……(＊５) を満たす点 R の移動の仕方は図 6 のようになる。

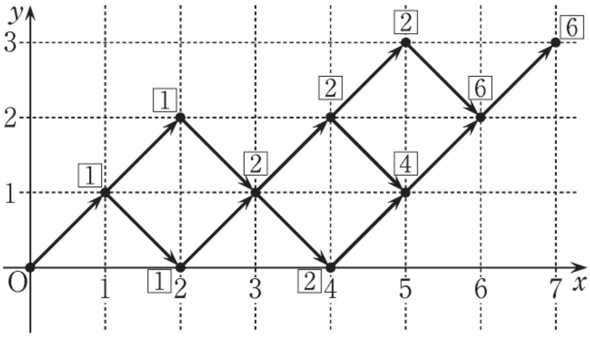


図　6

よって，点 R の移動の仕方が条件(＊５)を満たすようなさいころの目の出方の総数は 6 通りである。

(ii)と同様に，(i)より，6 通りのそれぞれの起こる確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^5\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ である。

したがって，さいころを 7 回投げる間，点 Q の座標がつねに 0 以上 3 以下であり，かつ 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 であり，かつ 3 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 1 である確率は

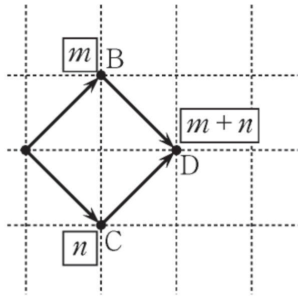
$$P(Y\cap Z)=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{24}{2187}$$

以上より，さいころを 7 回投げる間，点 Q の座標がつねに 0 以上 3 以下であり，かつ 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 であったとき，3 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 1 である条件付き確率は

$$P_Y(Z)=\frac{P(Y\cap Z)}{P(Y)}=\frac{\dfrac{24}{2187}}{\dfrac{32}{2187}}=\frac{\boxed{3}}{\boxed{4}} \quad \to\frac{ニ}{ヌ}$$

解説

(1)(i)　例えば，右図において，点 O (0, 0) から点Dまでの移動の仕方は



(あ)　点 O (0, 0) から点Bまで移動したのち，硬貨の裏が出て，点Dに移動する。

(い)　点 O (0, 0) から点Cまで移動したのち，硬貨の表が出て，点Dに移動する。

のいずれかである。

(あ)　点Bに至る移動の仕方を m 通りとすると，硬貨の裏が出るのは1通りだから，このときの移動の仕方は，$m\times1=m$ 通り。

(い)　点Cに至る移動の仕方を n 通りとすると，硬貨の表が出るのは1通りだから，このときの移動の仕方は，$n\times1=n$ 通り。

(あ)・(い)より，点Dに至る移動の仕方は，$(m+n)$ 通りとなる。

(ii)　点Pの x 座標は，硬貨の表裏の出方によらず，硬貨を投げるごとに1増加するだけだから，点Pの y 座標にだけ注目して考えればよい。

条件付き確率 $P_W(X)$ は，以下のように求めることもできる。

$y_1\geqq0$ かつ $y_2\geqq0$ かつ $y_3\geqq0$ かつ $y_4\geqq0$ を満たすような硬貨の表裏の出方の総数は，①より6通り。このうち，$y_1\geqq0$ かつ $y_2\geqq0$ かつ $y_3=1$ かつ $y_4\geqq0$ を満たすような硬貨の表裏の出方の総数は，③より4通り。

したがって，$y_1\geqq0$ かつ $y_2\geqq0$ かつ $y_3\geqq0$ かつ $y_4\geqq0$ であったとき，$y_3=1$ である条件付き確率 $P_W(X)$ は，$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$ となる。

(iii)　(i)・(ii)と同様に，点Pが点 (4, 2) に至る移動の仕方を，図を用いて考えることもできる。

(2)(i)　(ii)・(iii)と同様に，点Rが点 (7, 3) に至る移動の仕方を，図を用いて考えることもできる。

(ii)　点Qの座標がつねに0以上3以下であるようなさいころの目の出方を考えるのが厄介なので，(1)を利用して新たに点 R $(k,\ r_k)$ を定義し，条件を満たす点 R $(k,\ r_k)$ の移動の仕方を考える。

(iii)　(ii)と同様に，条件を満たす点 R $(k,\ r_k)$ の移動の仕方を考える。

条件付き確率 $P_Y(Z)$ は，以下のように求めることもできる。

$0\leqq r_k\leqq3$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ かつ $r_7=3$ を満たすようなさいころの目の出方の総数は8通り。このうち，$0\leqq r_k\leqq3$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ かつ $r_7=3$ かつ $r_3=1$ を満たすようなさいころの目の出方の総数は6通り。

したがって，$0\leqq r_k\leqq3$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 7)$ かつ $r_7=3$ であったとき，$r_3=1$ である条件付き確率 $P_Y(Z)$ は，$\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$ となる。

第4問 やや難 整数の性質 《不定方程式，余り》

(1)　二つの式が

$$7x+13y+17z=8 \quad \cdots\cdots①$$

$$35x+39y+34z=37 \quad \cdots\cdots②$$

の場合を考える。①，②から x を消去すると，①×5－② より

$$\boxed{26}\,y+\boxed{51}\,z=3 \quad \cdots\cdots③ \quad \to アイ，ウエ$$

を得る。③を y，z についての不定方程式とみる。不定方程式 $26y+51z=1$ を考えれば，$y=2$，$z=-1$ のとき，$26\cdot 2+51\cdot(-1)=1$ が成り立つから，両辺を3倍して

$$26\cdot 6+51\cdot(-3)=3 \quad \cdots\cdots⑬$$

③－⑬より

$$26(y-6)+51(z+3)=0$$

$$26(6-y)=51(z+3)$$

26と51は互いに素だから，③の整数解は

$$6-y=51k,\quad z+3=26k$$

$$\therefore\quad y=6-51k,\quad z=26k-3 \quad (k：整数)$$

③の整数解のうち，y が正の整数で最小になるのは，$k=0$ のときで

$$y=\boxed{6},\quad z=\boxed{-3} \quad \to オ，カキ$$

である。よって，③のすべての整数解は，k を整数として

$$y=6-\boxed{51}\,k,\quad z=-3+\boxed{26}\,k \quad \to クケ，コサ$$

と表される。これらを①に代入して x を求めると

$$7x+13(6-51k)+17(-3+26k)=8$$

$$7x=221k-19 \qquad \therefore\quad x=\frac{221k-19}{7}$$

$221=7\cdot 31+4$，$-19=7\cdot(-3)+2$ に注意すれば

$$x=\frac{(7\cdot 31+4)k+\{7\cdot(-3)+2\}}{7}=\frac{7(31k-3)+4k+2}{7}$$

$$=31k-3+\frac{\boxed{4}\,k+2}{7} \quad \to シ$$

となるので，x が整数となるのは，$\dfrac{4k+2}{7}$ が整数となるときである。

k を7で割ったときの余りを r（$r=0$，1，2，…，6）とすると

$$k=7l+r \quad (l：整数)$$

と表せるから

$$\frac{4k+2}{7}=\frac{4(7l+r)+2}{7}=\frac{7\cdot 4l+4r+2}{7}$$

$7\cdot 4l$ は 7 の倍数であるから，$4r+2$ が 7 の倍数となるのは，$r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6$ を順に代入して調べれば

$$r=3$$

のときである。

よって，x が整数になるのは，k を 7 で割ったときの余りが $\boxed{3}$ →ス のときである。

以上のことから，この場合は，二つの式をともに満たす整数 $x,\ y,\ z$ が存在することがわかる。

(2)　二つの式が

$$2x+5y+7z=a \quad (a：整数) \quad \cdots\cdots ④$$

$$3x+25y+21z=-1 \quad \cdots\cdots ⑤$$

の場合を考える。⑤－④ から

$$x=-20y-14z-1-a \quad \cdots\cdots ⑥$$

を得る。また，⑤×2－④×3 から

$$35y+21z=-2-3a \quad \cdots\cdots ⑦$$

を得る。このとき，⑦は

$$7(5y+3z)=-2-3a \qquad \therefore \quad 5y+3z=\frac{-2-3a}{7} \quad \cdots\cdots ⑭$$

⑦を満たす整数 $y,\ z$ が存在するならば，⑭より，$\dfrac{-2-3a}{7}$ が整数，すなわち，$-2-3a$ が 7 の倍数となる。

逆に，$\dfrac{-2-3a}{7}$ が整数，すなわち，$-2-3a$ が 7 の倍数であれば，5 と 3 が互いに素なので，⑭より，⑦を満たす整数 $y,\ z$ が存在する。

これより，⑦を満たす整数 $y,\ z$ が存在するための必要十分条件は，$-2-3a$ が 7 の倍数であることである。

a を 7 で割ったときの余りで分類する。a を 7 で割ったときの余りを s $(s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ とすると

$$a=7m+s \quad (m：整数)$$

と表せるから

$$-2-3a=-2-3(7m+s)=7\cdot(-3m)-3s-2$$

a を 7 で割ったときの余り s と，$-2-3a$ を 7 で割ったときの余りの関係は，次の表のようになる。

a を 7 で割ったときの余り s	0	1	2	3	4	5	6
$-2-3a$ を 7 で割ったときの余り	5	2	6	3	0	4	1

よって，上の表より

a を $\boxed{7}$ →セ で割ったときの余りが $\boxed{4}$ →ソ である

ことは，⑦を満たす整数 y，z が存在するための必要十分条件であることがわかる。

そのときの整数 y，z を⑥に代入すると，a は整数より，x も整数になる。また，

そのときの x，y，z は④と⑤をともに満たす。

以上のことから，この場合は，a の値によって，二つの式をともに満たす整数 x，y，z が存在する場合と存在しない場合があることがわかる。

(3)　二つの式が

$$x+2y+bz=1 \quad (b：\text{整数}) \quad \cdots\cdots ⑧$$

$$5x+6y+3z=5+b \quad \cdots\cdots ⑨$$

の場合を考える。⑨－⑧×5 から

$$-4y+(3-5b)z=b \quad \cdots\cdots ⑩$$

を得る。⑩の左辺の y の係数に着目することにより，b を 4 で割ったときの余りで分類して，-4 と $3-5b$ が互いに素であるかどうかを調べる。

(ア)　b を 4 で割ったときの余りが 0 のとき

$b=4n$（n：整数）とおくと，⑩は

$$-4y+(3-20n)z=4n$$

ここで

$$3-20n=2(1-10n)+1$$

となるので，$1-10n$ が整数より，$3-20n$ は奇数だから，-4 と $3-20n$ は互いに素である。

よって，⑩を満たす整数 y，z が存在する。

(イ)　b を 4 で割ったときの余りが 1 のとき

$b=4n+1$（n：整数）とおくと，⑩は

$$-4y+(-2-20n)z=4n+1 \quad \cdots\cdots ⑮$$

ここで

$$-2-20n=2(-1-10n)$$

となるので，$-1-10n$ が整数より，$-2-20n$ は偶数だから，$-4y$ が偶数，$4n+1$ が奇数であることに注意すれば，⑮の左辺は偶数，⑮の右辺は奇数となる。

よって，⑩を満たす整数 y，z は存在しない。

(ウ)　b を 4 で割ったときの余りが 2 のとき

$b=4n+2$（n：整数）とおくと，⑩は

$$-4y+(-7-20n)z=4n+2$$

ここで

$$-7-20n=2(-4-10n)+1$$

となるので，$-4-10n$ が整数より，$-7-20n$ は奇数だから，-4 と $-7-20n$ は互いに素である。

よって，⑩を満たす整数 y，z が存在する。

(エ)　b を 4 で割ったときの余りが 3 のとき

$b=4n+3$（n：整数）とおくと，⑩は

$$-4y+(-12-20n)z=4n+3 \quad \cdots\cdots ⑯$$

ここで

$$-12-20n=2(-6-10n)$$

となるので，$-6-10n$ が整数より，$-12-20n$ は偶数だから，$-4y$ が偶数，$4n+3$ が奇数であることに注意すれば，⑯の左辺は偶数，⑯の右辺は奇数となる。

よって，⑩を満たす整数 y，z は存在しない。

したがって，(ア)〜(エ)より

　　b を 4 で割ったときの余りが $\boxed{0}$ →タ または $\boxed{2}$ →チ である

ことは，⑩を満たす整数 y，z が存在するための必要十分条件であることがわかる。

そのときの整数 y，z を⑧に代入すると，x も整数になる。また，そのときの x，y，z は⑧と⑨をともに満たす。

以上のことから，この場合も，b の値によって，二つの式をともに満たす整数 x，y，z が存在する場合と存在しない場合があることがわかる。

(4)　二つの式が

$$x+3y+5z=1 \quad \cdots\cdots ⑪$$

$$cx+3(c+5)y+10z=3 \quad (c：整数) \quad \cdots\cdots ⑫$$

の場合を考える。これまでと同様に，⑪$\times c-$⑫ から

$$-15y+(5c-10)z=c-3$$

$$-15y+5(c-2)z=c-3$$

$$5\{-3y+(c-2)z\}=c-3$$

$$-3y+(c-2)z=\frac{c-3}{5} \quad \cdots\cdots ⑰$$

を得る。⑰を満たす整数 y，z が存在するならば，$\frac{c-3}{5}$ が整数，すなわち，$c-3$ が 5 の倍数でなければならないから

$$c-3=5p \quad (p：整数)$$

すなわち

$$c=5p+3$$

とおく。このとき，⑰は

$$-3y+(5p+1)z=p \quad \cdots\cdots ⑱$$

p を 3 で割ったときの余りで分類して，-3 と $5p+1$ が互いに素であるかどうかを調べる。

(オ)　p を 3 で割ったときの余りが 0 のとき

$p=3q$（q：整数）とおくと，⑱は

$$-3y+(15q+1)z=3q$$

ここで，$15q+1$ は 3 で割ったときの余りが 1 だから，-3 と $15q+1$ は互いに素である。

よって，⑱を満たす整数 y，z が存在する。

(カ)　p を 3 で割ったときの余りが 1 のとき

$p=3q+1$（q：整数）とおくと，⑱は

$$-3y+(15q+6)z=3q+1 \quad \cdots\cdots ⑲$$

ここで

$$15q+6=3(5q+2)$$

となるので，$5q+2$ が整数より，$15q+6$ は 3 の倍数だから，$-3y$ が 3 の倍数，$3q+1$ は 3 で割ったときの余りが 1 であることに注意すれば，⑲の左辺は 3 の倍数，⑲の右辺は 3 で割ったときの余りが 1 となる。

よって，⑱を満たす整数 y，z は存在しない。

(キ)　p を 3 で割ったときの余りが 2 のとき

$p=3q+2$（q：整数）とおくと，⑱は

$$-3y+(15q+11)z=3q+2$$

ここで

$$15q+11=3(5q+3)+2$$

となるので，$5q+3$ が整数より，$15q+11$ は 3 で割ったときの余りが 2 だから，-3 と $15q+11$ は互いに素である。

よって，⑱を満たす整数 y，z が存在する。

したがって，(オ)～(キ)より，⑰を満たす c は，$p=3q$ または $3q+2$ で，$c=5p+3$ に代入して

$$c=5\cdot 3q+3=15q+3 \quad \text{または} \quad c=5(3q+2)+3=15q+13$$

となるから

c を 15 で割ったときの余りが 3 または 13 である

ことは，⑰を満たす整数 y，z が存在するための必要十分条件であることがわかる。そのときの整数 y，z を⑪に代入すると，x も整数となる。また，そのときの x，y，z は⑪と⑫をともに満たす。

以上のことにより

c を $\boxed{15}$ →ツテ で割ったときの余りが $\boxed{3}$ →ト または $\boxed{13}$ →ナニ

　　　である

ことは，⑪と⑫をともに満たす整数 x，y，z が存在するための必要十分条件であることがわかる。

解説

(1)　$y=2$，$z=-1$ が不定方程式 $26y+51z=1$ を満たすことに気付かなければ，26 と 51 にユークリッドの互除法を用いることで求められる。実際には

$51=26\cdot1+25$ より　　$25=51-26\cdot1$

$26=25\cdot1+1$ より　　$1=26-25\cdot1$

すなわち

$$\begin{aligned}1&=26-25\cdot1\\&=26-(51-26\cdot1)\\&=26\cdot2+51\cdot(-1)\end{aligned}$$

と変形することで，$y=2$，$z=-1$ を求めることができる。

③の整数解のうち，y が正の整数で最小となるような k の値は，k に適当な値を代入していくことで見つけることができるが，y が正の整数であることから，($y=$) $6-51k>0$ より，$k<\dfrac{2}{17}$ となるので，$k=0$，-1，-2，… を代入して見つけてもよい。

(2)　次のことを用いることで，⑦を満たす整数 y，z が存在することがわかる。

ポイント　不定方程式 $ax+by=c$ の整数解の存在条件

a，b が互いに素な整数，c が整数であるならば，$ax+by=c$ を満たす整数 x，y が存在する。

⑭において，5 と 3 が互いに素だから，$\dfrac{-2-3a}{7}$ が整数であれば，⑦を満たす整数 y，z が存在する。

$a=7m+s$ とおいて，$-2-3a=7\cdot(-3m)-3s-2$ を 7 で割ったときの余りを求める際，$s=0$，1 のときには $-2-3a=7\cdot(-3m-1)-3s+5$，$s=2$，3，4 のときには $-2-3a=7\cdot(-3m-2)-3s+12$，$s=5$，6 のときには $-2-3a=7\cdot(-3m-3)-3s+19$ の形に変形すると，余りが求まる。

a を 7 で割ったときの余り s と，$-2-3a$ を 7 で割ったときの余りの関係を表にまとめると，a を 7 で割ったときの余りが 4 のとき，$-2-3a$ は 7 の倍数となる。また，表より，すべての整数 a について，$-2-3a$ が 7 の倍数となるか，7 の倍数とならないか，を調べ上げたことになるから，$-2-3a$ が 7 の倍数となるならば，a は 7 で割ったときの余りが 4 である。したがって，a を 7 で割ったときの余りが 4 であることは，$-2-3a$ が 7 の倍数であるための必要十分条件であることがわかる。

(3)　⑩において，⑩の右辺 b が整数だから，-4 と $3-5b$ が互いに素であれば，〔解説〕(2)の ポイント より，⑩を満たす整数 y，z が存在する。

(ア)〜(エ)より，b を 4 で割ったときの余りが 0 または 2 のとき，⑩を満たす整数 y，z が存在する。また，(ア)〜(エ)より，すべての整数 b について，⑩を満たす整数 y，z が存在するか，存在しないか，を調べ上げたことになるから，⑩を満たす整数 y，z が存在するならば，b は 4 で割ったときの余りが 0 または 2 である。したがって，b を 4 で割ったときの余りが 0 または 2 であることは，⑩を満たす整数 y，z が存在するための必要十分条件であることがわかる。

(4)　(2)・(3)で考察したことと同様にすることで，⑪と⑫をともに満たす整数 x，y，z が存在するための c の必要十分条件を求める。

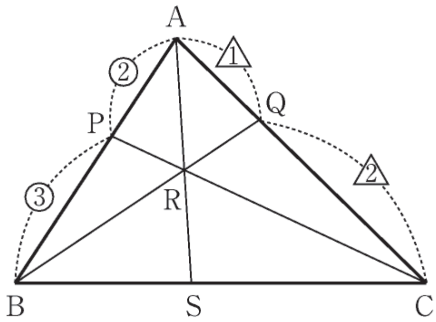
⑰を満たす整数 y，z が存在するならば，$c-3$ が 5 の倍数でなければならないから，$c-3=5p$ とおいた。逆に，$c-3$ が 5 の倍数（$c-3=5p$）のとき，-3 と $c-2$ が互いに素となるかどうかは，(オ)〜(キ)において調べている。

〔解説〕(3)と同様に考えれば，⑱において，p を 3 で割ったときの余りが 0 または 2 であることは，⑱を満たす整数 y，z が存在するための必要十分条件となるから，⑰を満たす c は，$c=5p+3$ に，$p=3q$ または $3q+2$ を代入したものとなる。

第５問 標準

図形の性質
《チェバの定理，内接円，メネラウスの定理，面積比》

(1)　点Qは辺 AC を $1:2$ に内分する点とする。



このとき，△ABC にチェバの定理を用いると

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BS}{SC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

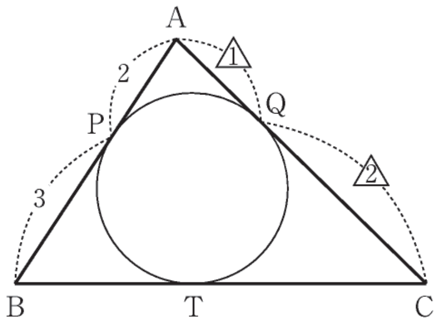
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{BS}{SC}\cdot\frac{2}{1}=1 \qquad \therefore \quad \frac{BS}{SC}=\frac{3}{4}$$

なので

$$BS:SC=3:4$$

よって，点Sは辺 BC を $\boxed{3}:\boxed{4}$ →ア，イ に内分する点である。

AB＝5 とすると，AP：PB＝2：3 なので



$$AP=\frac{2}{5}AB=\frac{2}{5}\cdot 5=2$$

$$PB=\frac{3}{5}AB=\frac{3}{5}\cdot 5=3$$

△ABC の内接円が辺 AB，辺 AC とそれぞれ点P，点Qで接しているとすると，点Aから接点P，Qまでの長さは等しいので

$$AQ=AP=\boxed{2} \quad →ウ$$

AQ：QC＝1：2 だから

$$QC=2AQ=2\cdot 2=4$$

△ABC の内接円が辺 BC と点Tで接しているとすると，点Bから接点P，Tまでの長さは等しく，点Cから接点T，Qまでの長さは等しいので

$$BT=PB=3,\ CT=QC=4$$

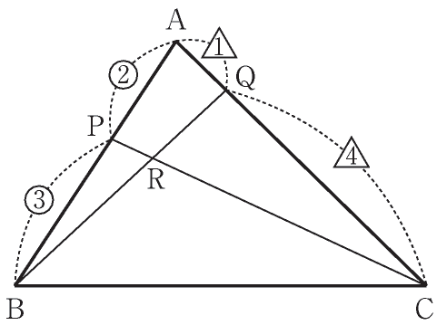
よって　　$BC=BT+CT=3+4=\boxed{7}$ →エ

であり，点Tは辺 BC を BT：CT＝3：4 に内分する点であるから，点Tと点Sは一致する。

したがって，**点Sは△ABC の内接円と辺 BC との接点**であることがわかる。　$\boxed{②}$ →オ

(2)　△BPR と△CQR の面積比について考察する。

(i)　点Qは辺 AC を $1:4$ に内分する点とする。



このとき，△ABQ と直線 CP にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AC}{CQ}\cdot\frac{QR}{RB}=1$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{QR}{RB}=1 \qquad \therefore \quad \frac{QR}{RB}=\frac{8}{15}$$

なので

QR：RB＝8：15

よって，点Rは，線分BQを $\boxed{15}$ ： $\boxed{8}$ →カキ，ク に内分する。

また，△ACPと直線BQにメネラウスの定理を用いると

$$\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PR}{RC}=1$$

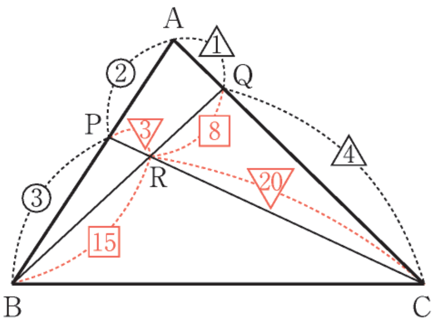
$$\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{PR}{RC}=1 \qquad \therefore \quad \frac{PR}{RC}=\frac{3}{20}$$

なので

PR：RC＝3：20

よって，点Rは，線分CPを $\boxed{20}$ ： $\boxed{3}$ →ケコ，サ に内分する。

したがって，△BPR，△BRCの底辺をそれぞれPR，RCと考えると，高さは共通なので



△BPR：△BRC＝PR：RC＝3：20

だから

$$\triangle BPR=\frac{3}{20}\triangle BRC$$

同様に，△CQR，△CRBの底辺をそれぞれQR，RBと考えると，高さは共通なので

△CQR：△CRB＝QR：RB＝8：15

だから

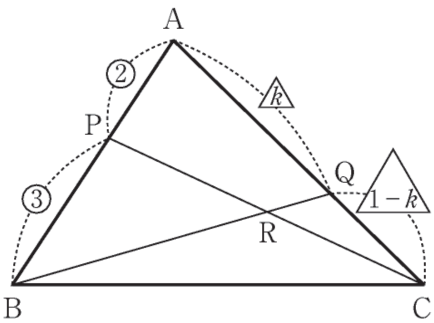
$$\triangle CQR=\frac{8}{15}\triangle CRB=\frac{8}{15}\triangle BRC$$

よって

$$\frac{\triangle CQR\text{の面積}}{\triangle BPR\text{の面積}}=\frac{\frac{8}{15}\triangle BRC}{\frac{3}{20}\triangle BRC}=\frac{\boxed{32}}{\boxed{9}} \quad \to \frac{シス}{セ}$$

(ii)　点Qは辺ACを k：$(1-k)$　$(0<k<1)$ に内分する点とする。

△ABQと直線CPにメネラウスの定理を用いると



$$\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AC}{CQ}\cdot\frac{QR}{RB}=1$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-k}\cdot\frac{QR}{RB}=1 \qquad \therefore \quad \frac{QR}{RB}=\frac{2(1-k)}{3}$$

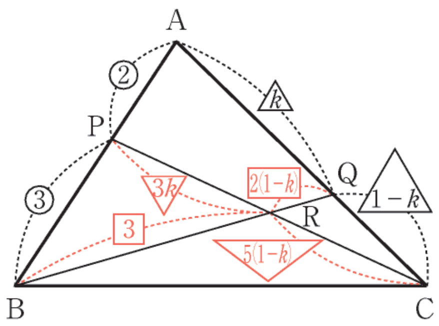
なので

$$QR : RB = 2(1-k) : 3$$

また，△ACP と直線 BQ にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AB}{BP} \cdot \frac{PR}{RC} = 1$$

$$\frac{1-k}{k} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{PR}{RC} = 1 \qquad \therefore \quad \frac{PR}{RC} = \frac{3k}{5(1-k)}$$



なので

$$PR : RC = 3k : 5(1-k)$$

したがって，△BPR，△BRC の底辺をそれぞれ PR，RC と考えると，高さは共通なので

$$\triangle BPR : \triangle BRC = PR : RC = 3k : 5(1-k)$$

だから

$$\triangle BPR = \frac{3k}{5(1-k)} \triangle BRC$$

同様に，△CQR，△CRB の底辺をそれぞれ QR，RB と考えると，高さは共通なので

$$\triangle CQR : \triangle CRB = QR : RB = 2(1-k) : 3$$

だから

$$\triangle CQR = \frac{2(1-k)}{3} \triangle CRB = \frac{2(1-k)}{3} \triangle BRC$$

よって

$$\frac{\triangle CQR \text{ の面積}}{\triangle BPR \text{ の面積}} = \frac{\dfrac{2(1-k)}{3} \triangle BRC}{\dfrac{3k}{5(1-k)} \triangle BRC} = \frac{10(1-k)^2}{9k}$$

なので，$\dfrac{\triangle CQR \text{ の面積}}{\triangle BPR \text{ の面積}} = \dfrac{1}{4}$ のとき

$$\frac{10(1-k)^2}{9k} = \frac{1}{4} \qquad 40(1-k)^2 = 9k$$

$$40k^2 - 89k + 40 = 0 \qquad (8k-5)(5k-8) = 0$$

$0 < k < 1$ より　　$k = \dfrac{5}{8}$

以上より　　$AQ : QC = k : (1-k) = \dfrac{5}{8} : \dfrac{3}{8} = 5 : 3$

なので，点Qは辺 AC を $\boxed{5}$: $\boxed{3}$ →ソ，タ に内分する点である。

解 説

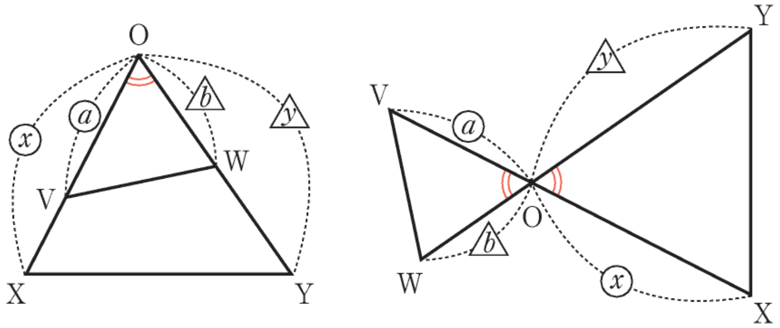
(1) 「図形の性質」において頻出であるチェバの定理を用いることで，BS : SC が求まる。

三角形と内接円がからむ問題では，円外の点から円に引いた接線の長さが等しいことを頻繁に利用するので，問題文「AQ＝$\boxed{\text{ウ}}$であることに注意すると」の誘導から，AQ＝AP，BT＝PB，CT＝QC となることに気付ける。
点 S は直線 AR と辺 BC の交点なので，S が△ABC の内接円と辺 BC の接点となるかどうかわからないから，△ABC の内接円が辺 BC と接する点を T としている。結果として，T＝S であることがわかる。また，勘違いしてしまいがちであるが，一般に点 R は内接円の中心とはならないことにも注意が必要である。

(2)(i) 「図形の性質」において頻出であるメネラウスの定理を用いることで，QR：RB，PR：RC が求まる。
$\dfrac{\triangle\text{CQR の面積}}{\triangle\text{BPR の面積}}=\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ を求める際，△BPR と△CQR を，△BRC で表したが，△ABC で表すと計算量が増えるので注意する。
また，一般に成り立つ次の性質を用いることでも，計算を簡略化できる。

ポイント　1つの角が等しい2つの三角形の面積比

下図のような，1つの角が等しい2つの三角形 OVW と OXY において，
OV：OX＝a：x，OW：OY＝b：y であるとき
　(三角形 OVW の面積)：(三角形 OXY の面積)＝ab：xy



この性質を用いると，△BPR：△CQR＝(PR×RB)：(QR×RC)
＝(3×15)：(8×20)＝9：32 となる。

(ii) (i)と同じ手順で解き進めるために，AQ：QC＝k：$(1-k)$ $(0<k<1)$ とおく。このとき，文字 k を用いて比を1文字だけで表すと煩雑にならずに済む。また，$0<k<1$ であることに注意する。
1つの角が等しい2つの三角形の面積比を用いると，△BPR：△CQR
＝(PR×RB)：(QR×RC)＝$(3k\times3)$：$\{2(1-k)\times5(1-k)\}=9k:10(1-k)^2$ となる。